

PEDAGOGÍA Y DIDÁCTICA

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil

Encarnación Castro Martínez
Enrique Castro Martínez
(Coords.)

PIRÁMIDE

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil

Coordinadores
ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ
ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ
CATEDRÁTICOS DE UNIVERSIDAD. DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.
UNIVERSIDAD DE GRANADA. ESPAÑA

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «PSICOLOGÍA»
Sección: Pedagogía

Director:
Francisco J. Labrador
Catedrático de Modificación de Conducta
de la Universidad Complutense de Madrid

Edición en versión digital

Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-3512-0

Relación de autores

María Consuelo Cañadas Santiago
Profesora titular de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Encarnación Castro Martínez
Catedrática de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Enrique Castro Martínez
Catedrático de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Elena Castro Rodríguez
Profesora sustituta interina. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

José Gutiérrez Pérez
Profesor titular de universidad. Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Universidad de Granada.

José Luis Lupiáñez Gómez
Profesor titular de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Marta Molina González
Profesora titular de universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Aurora del Río Cabeza
Profesora contratada doctora interina. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Profesor ayudante doctor. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Índice

Prefacio

Ser profesor en la etapa de infantil conlleva una cualificación profesional y una responsabilidad añadida. Este libro ha sido escrito con el objetivo de servir de base para la preparación de los futuros maestros de educación infantil, y proporcionar ayuda, en su formación continua, a aquellos que están en ejercicio. El libro se centra en la faceta de educadores de matemáticas que involucra la profesión de maestro de educación infantil. Nuestra experiencia como formadores de docentes y la necesidad de aportar información, muy escasa en este ámbito, nos han motivado a ello.

Es conocido que el desarrollo cognitivo e intelectual de los niños antes de entrar en educación primaria es fundamental para su futuro logro educativo; que la alfabetización y el conocimiento de las matemáticas son esenciales para progresar en la escuela, y que la capacidad de los niños para adquirir habilidades lingüísticas y matemáticas está influida por la naturaleza de sus experiencias en las edades tempranas.

Aunque los niños «aprenden por su cuenta», de forma natural, en el desarrollo evolutivo que adquieren desenvolviéndose en el mundo, necesitan de educadores (padres, maestros, hermanos mayores) que guíen su aprendizaje y lo refuercen. La teoría social-constructivista del desarrollo cognitivo de Vygotsky sostiene que el aprendizaje es más probable que ocurra si los adultos, o niños mayores, medien en las experiencias de aprendizaje de los pequeños. Para la citada teoría, el papel del profesor en el aprendizaje es considerado fundamental.



Es habitual pensar que, dado que las matemáticas que se pueden aprender en la infancia son muy sencillas, cualquier persona medianamente culta está preparada para impartirlas en educación infantil. Este pensamiento refleja gran desconocimiento de los conceptos matemáticos que pueden desarrollar los niños en las primeras edades, y las habilidades que debe poseer el profesorado para guiar su actuación docente.

En los últimos años se ha realizado un buen número de investigaciones que han centrado la atención en la capacidad de los niños pequeños para adquirir conocimiento matemático. Entre sus resultados destacan que la forma en que el profesorado habla con los niños y el tipo de actividades y experiencias que les plantean influyen en el conocimiento, en las ha-

bilidades y en las actitudes que los niños adquieren sobre las matemáticas. Se reconoce que los educadores de la primera infancia desempeñan un papel crucial y se convierten en uno de los principales vehículos a través de los cuales los niños aprenden.

El profesor, para enseñar matemáticas, necesita un conocimiento complejo, compendio de una serie de componentes: conocimiento del contenido matemático, conocimiento pedagógico y conocimiento didáctico del contenido que trata de enseñar, así como conocimiento curricular, que incluye objetivos y metas de aprendizaje.

Para apoyar adecuadamente el desarrollo matemático en los primeros años escolares, los maestros requieren conocimiento y profunda comprensión de las matemáticas que han de desarrollar en sus estudiantes, y no se puede asumir que se tiene adquirido dicho conocimiento, pues, aunque los conceptos matemáticos tempranos pueden parecen muy básicos, de hecho son muy complejos en sus fundamentos. La formación que tenga el profesorado en matemáticas es uno de los factores que más influyen en lo que los estudiantes aprenden acerca de dicha materia. La preparación del profesor es esencial para la enseñanza efectiva en contextos tanto formales como informales. Esto hace necesario que el profesorado posea una extensa base de las matemáticas que ha de trabajar en su aula.

Pero no basta con el dominio de las matemáticas; también es necesario que el profesorado posea un vasto conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento y aprendizaje matemáticos de los escolares. Para orientar adecuadamente su acción hacia el aprendizaje y desarrollo infantiles, los maestros necesitan conocer la forma de aprender de los niños y tener habilidades que les lleven a realizar una labor efectiva. Los buenos maestros son capaces de interpretar lo que el niño está haciendo y tratar de ver la situación desde el punto de vista de éste. Deben usar una variedad de estrategias de enseñanza para promover el aprendizaje y conocer la mejor manera de enseñar los conceptos a los estudiantes. También han de ser capaces de razonar y justificar por qué ciertos procedimientos son válidos y otros no lo son, utilizar el lenguaje matemático correctamente, ver las conexiones entre las ideas matemáticas y entender cómo se construyen unas ideas matemáticas sobre otras.

Este saber le permitirá realizar una serie de tareas y desenvolverse en situaciones de enseñanza/aprendizaje de forma adecuada.

Los autores de este texto pretendemos que su estudio capacite a los maestros de educación infantil en las siguientes competencias:

- Referente a sus conocimientos:

  - — Realizar cálculos aritméticos.
  - — Resolver problemas matemáticos escolares correctamente.
  - — Orientarse y ubicarse con relación a diferentes sistemas de referencia.
  - — Hacer razonamientos consistentes.
  - — Conocer las magnitudes físicas y la medida de éstas.
  - — Entender las matemáticas que enseña.
  - — Utilizar con precisión el lenguaje y notaciones matemáticos usuales.

- En cuanto a habilidades:

  - — Reconocer si un alumno da una respuesta incorrecta.
  - — Identificar si un libro de texto presenta información inexacta.
  - — Responder adecuadamente a ¿por qué...? (preguntas) de los estudiantes.
  - — Encontrar ejemplos para aclarar cualquier concepto matemático específico.
  - — Caracterizar el conocimiento involucrado en una situación de aprendizaje.
  - — Preparar tareas y situaciones de aprendizaje de acuerdo a metas y objetivos.
  - — Establecer conexiones a través de los diferentes temas de las matemáticas.
  - — Conectar las matemáticas que enseñan con las que se estudiarán después.
  - — Modificar tareas para adaptarlas a necesidades especiales (con diferente grado de dificultad).
  - — Hacer preguntas matemáticas productivas a los estudiantes.

- Prever lo que los estudiantes encontrarán interesante y motivador al elegir una tarea o situación.
- Anticipar si a los estudiantes les resultará difícil o fácil la realización de una tarea o situación.
- Escuchar e interpretar ideas emergentes e incompletas de los estudiantes.
- Secuenciar contenido matemático.
- Articular las competencias del currículo de matemáticas.
- Explicar los objetivos matemáticos y propósitos a los padres.

• Respecto a su actitud:

- Mostrarse dispuestos a realizar una formación continua.
- Basar su formación continua en el conocimiento científico derivado de la investigación propia y de otros investigadores contemporáneos.

En suma, pretendemos que a través del estudio de este texto los educadores de infantil adquieran un perfil profesional competente y reflexivo, capaz de hacer investigación en el aula.

El libro se compone de diez capítulos, que se agrupan en tres bloques o categorías. El primer bloque lo forman los capítulos uno y dos, que tratan de aspectos generales relevantes para el educador matemático infantil y dan sustento al resto del libro. Un segundo bloque, formado por los capítulos tres, cinco, siete y nueve, se centra en el conocimiento matemático que el profesorado de educación infantil ha de poseer. El tercer bloque lo componen los capítulos cuatro, seis, ocho y diez, en los que se presenta el conocimiento pedagógico, didáctico y curricular propio de las matemáticas de las edades tempranas.

Los capítulos pares e impares (con excepción de los dos primeros) están conectados, como comprobarán los lectores del texto, de la siguiente manera: en el capítulo impar se trata de forma sencilla y asequible la matemática básica que sustenta el conocimiento informal que los niños han de adquirir sobre un tema. A continuación el capítulo par hace un recorrido por elementos de enseñanza y aprendizaje de dicho tema en la educación infantil. Es decir, en los capítulos impares se recoge aquello que los maestros deben saber sobre la matemática que van a trabajar con sus estudiantes, el contenido de la materia a enseñar, y en los capítulos pares, lo que los maestros necesitan conocer para su desenvolvimiento profesional cuando trabajen sobre esta materia, es decir, el conocimiento pedagógico, didáctico y curricular del contenido a enseñar.

Matemáticas en educación infantil 1

ENCARNACIÓN CASTRO
ENRIQUE CASTRO

Mamá: *mañana es el cumpleaños de Paula.*
Rafael: *mañana; ¿y por qué?*
Mamá: *porque nació este día, cumple nueve años.*
Rafael: *¡oh nueve! Son casi diez. ¡Eso es mucho!*

(Rafael, 3 años, 6 meses)



Figura 1.1.—Niños atendiendo una explicación.

Las creencias sobre lo que son las matemáticas y lo que significa aprenderlas y enseñarlas no son unánimes en todos los profesionales de la educación que imparten esta materia y están muy mediatizadas por diversos factores, entre los que se encuentran: los aportes que proporciona la investigación, la cultura del momento histórico en el que se desarrolla la enseñanza, la experiencia profesional del propio docente, las vivencias del profesorado en su propio aprendizaje y las «leyendas», sin fundamento, que a veces circulan en la comunidad educativa.

En este capítulo tratamos de poner de manifiesto creencias generalizadas actuales sobre la educación matemática en la infancia, que se han formado a partir de la experiencia de los profesionales de educación infantil y de la investigación realizada sobre el desarrollo evolutivo y la cognición en estos primeros años de la vida de las personas.

El estudio del capítulo debe proporcionar al lector, fundamentalmente, una visión sobre tres aspectos: estado de opinión generalizado actual sobre las capacidades matemáticas de los niños en edades tempranas, tratamiento curricular de las matemáticas en educación infantil y reflexiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en este nivel.

ACTIVIDAD 1: Entre los resultados obtenidos en una encuesta realizada a maestros de educación infantil para conocer sus creencias sobre las matemáticas en este nivel educativo, han surgido los siguientes:

a) Los niños pequeños no están preparados para la educación matemática.
b) Las matemáticas son para algunos niños con genes que los dotan especialmente para esta materia.
c) Números y formas simples son suficientes en educación infantil.

Comenta, de forma justificada, tus acuerdos y desacuerdos con estas creencias.

1. EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL

Por educación matemática infantil entendemos aquella formación que recibe un estudiante, de edad temprana, sobre matemáticas. Esta formación no se reduce meramente a una instrucción que tiende a conseguir una memorización de hechos y una reproducción rutinaria de ciertas destrezas matemáticas, sino que abarca una función educativa amplia, como instruir en un pensamiento abierto, reflexivo, flexible y creativo.

La educación matemática infantil es el comienzo del perfeccionamiento del saber matemático de las personas, en sus primeros años de vida, en una edad comprendida entre 0 y 6 años. Para que el proceso desemboque en resultados provechosos se precisa la asistencia una guía y orientación por parte de una persona cualificada que lleve las riendas de todo el procedimiento. Esta función de guía la ejerce el educador.

Educador matemático es toda aquella persona que se dedica a la formación de otras utilizando las matemáticas, las cuales se toman como eje de la educación. Dicha persona, en este caso, suele ser el maestro de educación infantil, aunque la función de educador también puede recaer en los padres, familiares o cuidadores. El educador matemático infantil ha de tener conocimientos matemáticos para abordar toda una gama de ideas de esta materia con las que los niños necesitan involucrarse. El maestro, además de educador, es un profesional que ha de realizar una serie de labores entre las que se encuentran, además de enseñar a los niños, planificar la enseñanza, evaluar el aprendizaje, colaborar con los compañeros y tratar con las familias de su alumnado.

La educación matemática de los estudiantes se conoce como matematización. La matematización consiste en llegar a abstraer, representar y crear modelos matemáticos a partir de las experiencias y actividades cotidianas vividas. Se considera que la matematización desempeña un papel central en el desarrollo de la competencia matemática, la cual es objetivo fundamental de la formación matemática actual. La competencia matemática, en sentido amplio, incluye otras competencias más concretas: establecer conexiones, comunicar pensamiento matemático, razonar sobre las acciones matemáticas, argumentar y justificar resultados, representar las

ideas matemáticas, resolver problemas y hacer generalizaciones. Todas estas competencias están englobadas en el proceso amplio de matematización.

Para iniciar a los niños en estas competencias es necesario involucrarlos en las tareas, de tal manera que su participación sea activa, que interpreten y expresen sus experiencias cotidianas en forma matemática y realicen análisis de los problemas del mundo real de manera matemática.

Las capacidades matemáticas a adquirir, ligadas a las competencias matemáticas, son sólo una parte de una red más amplia de capacidades que los niños deben desarrollar en los primeros años, incluyendo las lingüísticas, físicas y sociales. Cada una de este conjunto de capacidades de diferentes áreas influye en, es influida por y se conecta con las demás.

2. ATENCIÓN MATEMÁTICA EN LA INFANCIA

Hace unas pocas décadas se esperaba que los primeros conocimientos sobre lectura, escritura y aritmética los niños los obtuvieran en la escuela primaria. Se pensaba que no tenían capacidad para adquirir conocimiento matemático que pudiese considerarse como tal antes de la educación primaria. Las ideas sobre la educación temprana han cambiado mucho en estos últimos años y en numerosos países se otorga gran importancia al pensamiento matemático temprano como fundamentación de habilidades importantes. En las últimas décadas se han producido cambios sustanciales acerca de la capacidad de los niños para razonar matemáticamente y su propensión a aprender conceptos y habilidades matemáticos. Las razones que se esgrimen se apoyan en consideraciones que unas veces son resultados de la investigación y otras son hechos constatados por la experiencia. Los apartados siguientes recogen algunas de esas razones.

2.1. Naturaleza destacada del desarrollo cognitivo de los primeros años

Resultados de la investigación en neurociencia confirman la conexión entre las experiencias de los niños en edades tempranas y sus logros en el futuro. Estos estudios han sugerido que el crecimiento del cerebro es altamente dependiente de las primeras experiencias que tienen los niños proporcionando evidencia de que un ambiente rico estimula el desarrollo del cerebro. Ha habido resultados que indican que la educación de un niño durante los primeros años, desde el nacimiento hasta los 6 años, forma la base sobre la que se construye el aprendizaje futuro. Las conclusiones de estos estudios han proporcionado información para la toma de decisiones educativas en la infancia.

En relación con las matemáticas, la numerosa investigación sobre las capacidades y el aprendizaje de los niños, en los primeros seis años de vida, confirma que las experiencias matemáticas tempranas tienen resultados que perduran en niveles superiores. El apoyo temprano al pensamiento matemático tiene implicaciones en la preparación escolar, que, a su vez, influye más tarde en el logro matemático. Ello ha contribuido a la percepción creciente de la importancia de la primera infancia como época en la que los niños participan en muchos aspectos de las matemáticas, tanto en casa como en los centros educativos. Paralelamente, la sociedad también ha creado conciencia de la importancia de las matemáticas en la vida de los individuos. Se concluye, pues, que comenzar temprano en la educación matemática de alta calidad crea oportunidades para un posterior aprendizaje matemático valioso.

2.2. Incremento del número de niños que reciben asistencia y atención en programas educativos

Entre los cambios sociales experimentados en los últimos tiempos hay dos que afectan a la escolarización de la infancia. Por un lado, la incorporación de las mujeres al mundo laboral, que exige atención al menor para que el desarrollo profesional de la mujer no se vea afectado por el cuidado y la atención de los hijos. Por otro lado, la consideración del derecho de la infancia a la educación. Los dos cambios han producido modificaciones en

el sistema educativo por lo que respecta a los primeros años de vida. En los países desarrollados se ha regulado la escolarización de los niños desde los 3 años y se ha abierto la posibilidad de dicha escolarización para todos. Ello ha conducido a un aumento de la escolarización de los niños de edades tempranas y a la exigencia de una atención eficaz.



Figura 1.2.—Niños entrando en su centro educativo.

La importancia de las matemáticas en la vida de los niños pequeños ha sido reconocida por responsables de la política educativa de numerosos países, en los cuales se intenta promover el acceso equitativo a una educación de calidad para todos los niños, percibiéndose que la educación matemática en la infancia puede fortalecer las bases de una educación de calidad permanente. La introducción en el currículo de las ideas de equidad y de que las matemáticas son para «todos» implica que todos los niños deben tener oportunidades para participar y beneficiarse de la educación matemática y ninguno debe ser excluido. Pero muchos niños pequeños, aunque tengan capacidad para aprender matemáticas, no gozan de las suficientes oportunidades para hacerlo. A comienzos del período de escolarización, muestran grandes diferencias en su conocimiento matemático. Mientras que algunos presentan una impresionante variedad de habilidades, otros evidencian muchas menos. La educación matemática temprana, de calidad, debe corregir estas diferencias.

2.3. Reconocimiento de las capacidades matemáticas de los niños pequeños

Cuando se consideran las matemáticas de la etapa infantil, mucha gente, incluso maestros de dicha etapa, piensa que se trata de aprender a contar e identificar los números. Pero en los últimos veinticinco años los investigadores han acumulado una gran cantidad de evidencia sobre las capacidades matemáticas de los niños de entre 3 y 5 años de edad. Han constatado que construyen, mediante su actividad en experiencias cotidianas, una variedad de conceptos y estrategias de matemática informal de fundamental importancia.

La mayoría de los niños, sobre los 3 años, expresan verbalmente números, a veces siguiendo correctamente el orden de la secuencia convencional. Esto constituye, para los adultos, un signo explícito de las habilidades numéricas futuras de los niños. Pero otras habilidades matemáticas, incluso numéricas, no son tan explícitas y exigen atención para descubrirlas cuando se ponen de manifiesto. La indagación sugiere que los niños tienen un conocimiento básico de la correspondencia uno a uno, incluso antes de que puedan enumerar una colección de objetos verbalmente, por conteo; pueden hacer coincidir dos colecciones de objetos, etiquetar cada elemento de una colección con un número e incluso elaborar una colección a juego con otra que no es visible sino que la tienen representada mentalmente.

Los niños pequeños también exploran las posiciones y las relaciones espaciales y propiedades de objetos y figuras bidimensionales y tridimensionales, y entienden cómo se mueve su cuerpo en el espacio, o sea, establecen relaciones espaciales.

Se ha constatado que la conciencia de la medición emerge mucho antes de que sepan cómo utilizar las herramientas de medición estándar, cuando empiezan a notar diferencias en sus alturas y en el peso y la longitud de varios objetos.

Se ha descubierto que los niños de tan sólo 3 o 4 años de edad comienzan a pensar algebraicamente mediante el trato con patrones (se está considerando el álgebra como una manera de pensar y razonar sobre las relaciones): la manipulación de blo-

ques de patrones, elaboración de sus propios patrones, organización de objetos de acuerdo a una regla o atención a los patrones que observan en el medio ambiente.



Figura 1.3.—Patrón realizado por un niño de 3 años, 6 meses.

Los atributos de los objetos que perciben, como parte de sus habilidades geométricas y de medición, son el germen del análisis de datos. Su propensión a organizar y ordenar objetos considerando sus atributos es un componente esencial de la capacidad de representar, analizar e interpretar datos. En estas acciones se identifica el pensamiento algebraico y el análisis de datos, conectando así contenidos de diferentes áreas matemáticas.

Los niños, desde pequeños, muestran incipientes habilidades de razonamiento científico. Algunos son capaces de interpretar patrones de datos simples y mostrar justificación para una conclusión, apoyándose en un patrón. Hacen uso de razonamiento sofisticado sin ser conscientes de que lo están haciendo y sin ser capaces de describir su razonamiento. Su pensamiento lógico les permite resolver problemas si éstos tienen sentido para ellos y si no se ven limitados por el dominio conceptual requerido. En muchos casos las ideas matemáticas que muestran son relativamente abstractas, por ejemplo, cuando se habla de objetos que no están presentes o se narran sucesos del pasado.

Se han encontrado indicios que dan a entender que los humanos nacen con predisposición, tal vez de manera innata, a desarrollar estas capacidades.

ACTIVIDAD 1: Busca en Internet información de teorías que tratan sobre lo innato y adquirido del conocimiento matemático. Realiza un resumen de 200 caracteres sobre la información encontrada.

2.4. Nuevas necesidades para una era tecnológica

En los últimos años, los avances en la tecnología han influido en la necesidad de incrementar y mejorar las prácticas matemáticas. Existe una alta conexión entre la tecnología y las matemáticas. La importancia de una sociedad matemáticamente competente, en una era tecnológica, es reconocida a nivel mundial. En la sociedad tecnológica actual el conocimiento matemático es considerado de vital importancia para el desarrollo de las personas ya que les permite desde un eficaz funcionamiento cotidiano hasta alcanzar éxitos en distintos ámbitos, como puede ser el económico. En una economía global como la actual, la gran mayoría de los empleos requieren habilidades matemáticas más sofisticadas que en el pasado. Aquellas personas que se relacionan bien con las matemáticas y la tecnología tendrán oportunidades y opciones, para su futuro, significativamente mejores que aquellas que no lo hagan. La relación entre matemáticas y tecnología lleva a pensar que ser competente en matemática abrirá las puertas a un futuro laboral prometedor; por el contrario, la falta de competencia matemática mantendrá las puertas cerradas a dicho futuro laboral.

Todos los argumentos anteriores avalan que los estudiantes necesitan una preparación matemática altamente cualificada. A los niños también les afecta, pues nacen en un mundo invadido por la tecnología digital en el cual, como hemos señalado, es esencial tener competencia matemática y disposición a utilizarla.

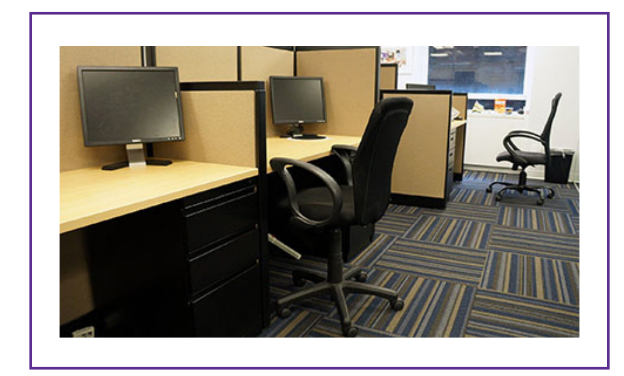


Figura 1.4.—Mesas de trabajo en una empresa.

Internacionalmente, se percibe la inquietud acerca de una formación matemática de calidad en los países desarrollados, que no sólo quieren asegurarse una cultura matemática base para todos sus miembros sino que buscan la formación de un número importante de jóvenes que estén preparados para desempeñar trabajos que requieren un alto nivel de competencia matemática. En estos casos, están abogando por mucha mayor atención a las experiencias en matemática temprana para que el progreso en la mejora de la competencia matemática sea efectivo. Se entiende que el aumento de energía, tiempo y compromiso con las matemáticas, en los primeros años, generará avances significativos en aprendizajes posteriores.

2.5. Influencia de los resultados en evaluaciones

En evaluaciones internacionales realizadas en los últimos años el conocimiento matemático de los estudiantes de algunos países resulta desfavorable comparado con el de estudiantes de otros países. Se especula que algunas diferencias bien pueden tener su inicio en el desarrollo de la matemática informal. Debido a estos resultados, existe preocupación generalizada acerca de los niveles de razonamiento matemático y de resolución de problemas que alcanzan los jóvenes, preocupación que se ha extendido a los niños en edad preescolar. La investigación indica que las diferencias en el conocimiento aparecen, en gran medida, debido a las lagunas de conexión entre el conocimiento intuitivo, informal, y las matemáticas escolares. Es especialmente perjudicial cuando este conocimiento informal está mal desarrollado.

Las diferencias que las pruebas muestran entre los escolares son atribuidas a diversos factores, entre los que está el nivel socioeconómico de las familias. Por lo general, los hijos de familias de nivel socioeconómico medio tienen niveles más altos de rendimiento en matemáticas que aquellos de familias más desfavorecidas. Tales diferencias suelen tener consecuencias duraderas para el rendimiento escolar posterior, y se hacen más pronunciadas durante la escuela primaria. Estas primeras diferencias en conocimiento matemático están asociadas a la cantidad de estímulos que los niños reciben de su medio. Se sabe que los estímulos tempranos procedentes del entorno son importantes para el desarrollo de una amplia gama de habilidades cognitivas. Los centros de atención de la infancia son potencialmente una fuente significativa de interacción que pueden y deben paliar las deficiencias que presenten algunos niños. Los estudios han mostrado que los programas de intervención integrales en edad temprana tienen un impacto positivo en el logro de los niños, tanto en matemáticas como en otras habilidades cognitivas y sociales. Se ha detectado una diferencia de tres años en el nivel de desarrollo de las matemáticas en estudiantes de comunidades de bajos recursos frente a otras de altos recursos. Partiendo de estos resultados, se argumenta que el aprendizaje de las matemáticas se ha convertido en una cuestión humanitaria, ya que los niños que no son cuantitativamente alfabetizados pueden estar condenados a una clase económica de segundo nivel en una sociedad como la nuestra, cada vez más tecnológica.

2.6. Carácter predictor del conocimiento matemático

El desarrollo temprano de habilidades matemáticas es un buen predictor de éxito escolar posterior. La evaluación del conocimiento cuantitativo y numérico de los niños se ha mostrado mejor herra-

mienta para predecir las posteriores adquisiciones matemáticas que los tests de inteligencia. Se ha constatado que el conocimiento temprano de las matemáticas no sólo predice el éxito posterior en esta materia, sino que también predice el logro de la lectura, y lo hace incluso mejor que las habilidades tempranas de lectura.

Con estos argumentos no se sugiere que los padres y educadores deban proporcionar a sus hijos o alumnos lecciones formales en matemáticas, sino que han de dedicar más atención a la formación matemática de los niños, de manera que puedan ampliar los conocimientos a partir de lo que éstos están haciendo.

Se alientan el pensamiento matemático y el razonamiento cuando los escolares participan en actividades tales como contar, medir, construir con bloques, juegos de mesa y de cartas, dramatizaciones, actividades musicales y relacionadas con el arte. En todos estos casos se proporciona un ambiente matemáticamente rico. Un entorno estimulante y de calidad ayuda a los niños al proporcionar oportunidades para observar, explorar, experimentar, cuestionar, debatir y razonar sobre las situaciones que viven en el mundo que los rodea.

Los niños aprenden a través de experiencias concretas con materiales y a través de interacciones intencionales, de sus maestros y educadores, con las que amplían su pensamiento. Es conveniente que los docentes hagan explícitas las matemáticas presentes en las experiencias vividas por los niños, pues esto les ayudará en su desarrollo matemático.

3. CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

El perfil de las matemáticas como área curricular se ha incrementado mucho en algunos países que buscan basar su economía en el conocimiento y donde muchas profesiones requieren un gran conocimiento matemático, científico o de áreas afines. En los círculos educativos hay, por tanto, preocupación por garantizar que un número suficiente de alumnos opten por estudiar estas materias, cosa que se refleja en los programas educativos.

En los documentos curriculares sobre educación de la infancia de estos países, la inclusión de contenidos y actividades que promueven el aprendizaje de las matemáticas puede ser identificada sin dificultad. En otros casos, en los currículos oficiales, las matemáticas no se señalan específicamente y quedan relegadas en epígrafes poco claros. Esto se debe a la naturaleza amalgamada de los currículos, de los planes de estudio para la educación infantil, perspectiva que refleja la influencia de la teoría del desarrollo cognitivo vigente en los últimos años. El punto de vista asociado a dichas teorías no considera dominios de conocimiento matemáticos individuales como componentes del plan de estudios de la etapa infantil. Se considera que los programas dedicados a escolares de corta edad deben centrarse en el desarrollo integral de los niños. Sugieren que el contenido de la materia debe ser integrado a través de un currículo holístico, de aprendizaje amplio, en lugar de fijarse objetivos cerrados, como la alfabetización y la aritmética. Esta no especificación de las matemáticas en el currículo de infantil ha llevado a muchos educadores de este nivel educativo a creer que los niños pequeños no tienen posibilidad de adquirir ciertos conocimientos.

Sea de una u otra forma, actualmente se considera que en los planes de estudio de matemáticas de educación infantil deben aparecer cinco grandes bloques: número, patrones y álgebra, medición, espacio, y probabilidad y datos. Todos estos bloques se relacionan entre sí como se muestra en la figura 1.5.

Algunos estándares curriculares y programas dan directrices flexibles basadas en criterios como:

- Los planes de estudio de matemáticas y prácticas de enseñanza deben ser apoyados en un sólido conocimiento de las matemáticas y en el desarrollo cognitivo de los niños.
- Centrarse en la investigación disponible y en la práctica de expertos.
- Fijar un rango de expectativas sobre capacidad a alcanzar por los niños en las ideas matemáticas que sean apropiadas para su desarrollo, en diferentes posibilidades.

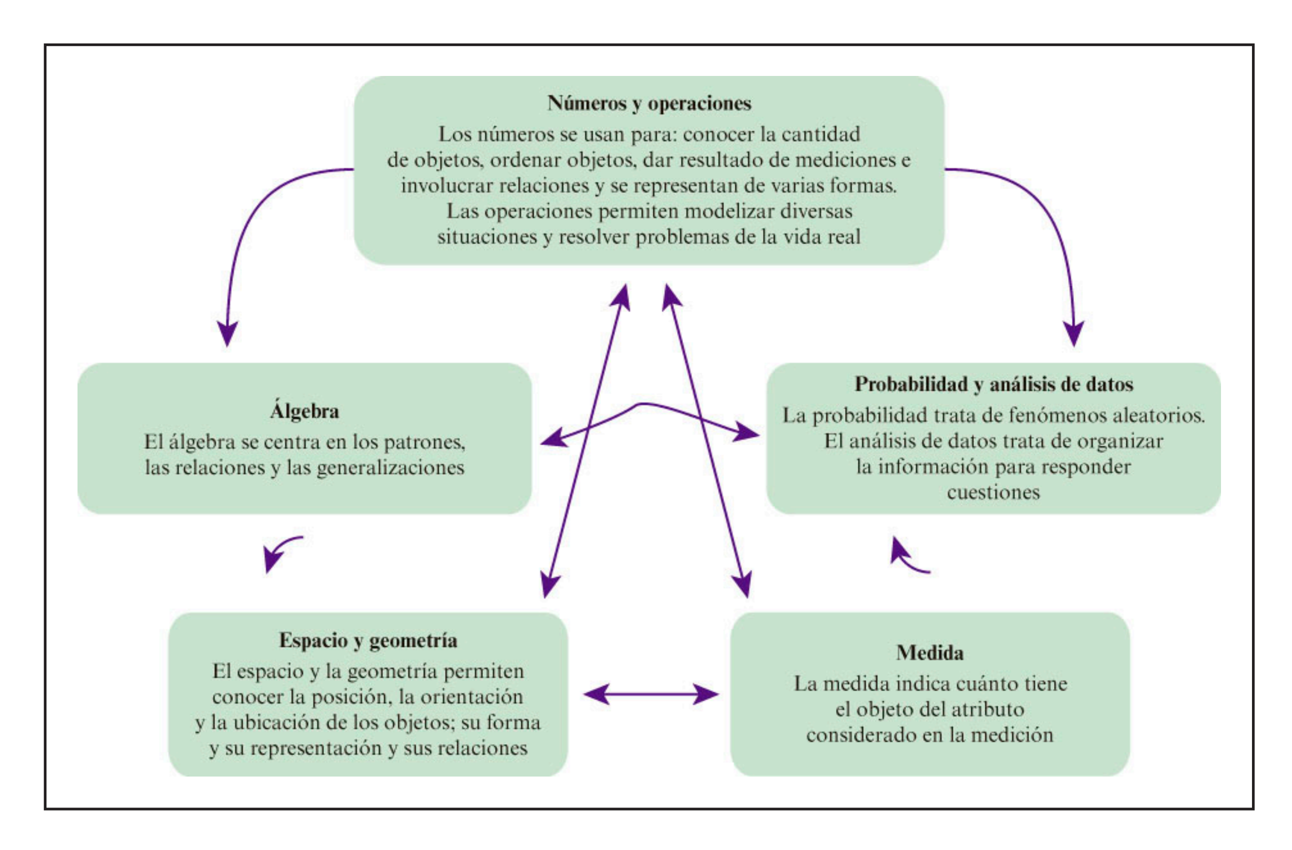


Figura 1.5.—Elementos del currículo de educación matemática infantil.

- El conocimiento debe ser supervisado por la observación y otras evaluaciones informales para garantizar que las decisiones sobre la enseñanza se basen en las necesidades matemáticas de cada escolar.

ACTIVIDAD 1: Analiza el currículo de Educación Infantil vigente en tu comunidad y concluye la forma en que están presentados los conocimientos matemáticos.

ACTIVIDAD 2: Recoge, del documento analizado, los objetivos, contenidos, métodos de enseñanza y de evaluación referidos a las matemáticas.

4. TIPOS DE CONOCIMIENTO INFANTIL

Piaget distinguió tres tipos de conocimiento que creemos de interés someter a consideración de los educadores de matemática infantil: conocimiento físico, conocimiento social y conocimiento lógico-matemático. Estos tres tipos de conocimiento se diferencian por su especificidad, por la fuente que los origina y por la forma en que se adquieren.

El conocimiento físico es conocimiento de las propiedades de los objetos. Ejemplos de este tipo de conocimiento son: todos los objetos caen si se les suelta, los objetos que son de cristal se rompen al caer, los objetos redondos ruedan, el hielo con el calor se hace agua. Se trata de conocimiento que

tiene su origen en el comportamiento de los objetos. Se adquiere por observación de lo que ocurre con los objetos y la interiorización de lo observado.

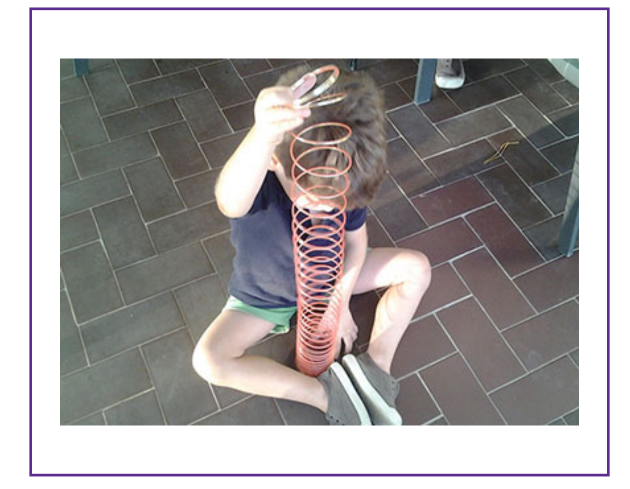


Figura 1.6.—Estiramiento de un objeto helicoidal.

El conocimiento social está relacionado con la cultura. Trata del lenguaje, los códigos, las normas y los valores propios de un grupo social. Son las convenciones que se han dado en ese grupo. Ejemplos de este tipo de conocimiento son: decir buenos días al llegar a clase, nombrar al signo 3 con la palabra tres, el domingo es fiesta y no hay colegio. Su origen está en el propio grupo que crea las normas. Se adquiere por transmisión oral y observación del comportamiento de las personas del grupo.

El conocimiento lógico-matemático es conocimiento de relaciones, patrones y generalizaciones. El origen de este conocimiento es interno al sujeto, contrariamente a lo que ocurre con los dos anteriores, cuyo origen es externo al sujeto. Ejemplos de este tipo de conocimiento son: comprender la diferencia de estatura de dos compañeros, reconocer que puede ir de casa al colegio por más de un itinerario, reconocer que dos figuras tienen la misma forma aunque su tamaño no coincida. El conocimiento lógico-matemático se adquiere al analizar y comparar objetos y situaciones, estableciendo entre ellos relaciones y llegando a conclusiones.



Figura 1.7.—Juego de objetos de igual forma y diferente tamaño.

No debe entenderse que estos tres tipos de conocimiento son los únicos, pero nos fijamos en ellos por considerar que su distinción es importante para saber qué aprenden los niños en cada situación y momento. Algunos de estos conocimientos van unidos y se complementan; ocurre sobre todo con los conocimientos de tipo físico y social y el lógico-matemático. No se conseguiría conocimiento físico si no se estableciesen relaciones entre las diferentes situaciones similares que se producen, y que llevan a una generalización. Igual ocurre con el conocimiento social. En los niños pequeños, el conocimiento lógico-matemático requiere experiencias sensoriales que proporcionen conocimiento físico, simultáneo o previo, para poder hacer comparaciones que conduzcan al establecimiento de relaciones, de semejanza o de diferencia. Ambos conocimientos se valen también del conocimiento social para simbolizar y evocar, mediante los lenguajes, los objetos y sus propiedades.

Actividad 1: En el patio la maestra ha colocado cubos con agua. Pone a los niños, en grupos de cuatro o cinco, a «investigar» lo que ocurre con varios objetos al introducirlos en el agua. Cada grupo dispone de, al menos, dos o tres tapones de corcho, varias piedras de un tamaño que quepa en la mano de un niño, otros tantos trozos de plastilina, cuatro galletas, un vaso de plástico, cuatro terrones de

azúcar, tres o cuatro llaves. A la vez que los niños van introduciendo y sacando los objetos del agua, la maestra les va interrogando para que reflexionen sobre qué ocurre con los diferentes objetos al soltarlos en el agua.

a) Identifica tipos de conocimiento que se trabajan en la situación anterior.
b) Indica cuatro objetos diferentes que incluirías para que los niños introdujesen en el agua. Justifica tu respuesta.
c) Indica cuatro preguntas que hacerles a los niños durante el desarrollo de la tarea.

ACTIVIDAD 2: Describe una situación, y cómo la llevarías a la práctica, para que trabajen niños de segundo ciclo de educación infantil, en la que se favorezca la adquisición de los conocimientos social y lógico-matemático.

5. APRENDER MATEMÁTICAS EN LA INFANCIA

Los niños, desde que nacen, tienen una incipiente pero importante competencia prematemática y cognitiva general y presentan predisposición al aprendizaje. A partir de ahí van desarrollando sus habilidades matemáticas.

Se mantiene que el desarrollo cognitivo, tanto general como de un dominio específico, se alcanza a través de una secuencia jerárquica de niveles en los que tanto los conceptos como la comprensión se van ampliando. En el paso de un nivel a otro superior, en un dominio concreto, intervienen numerosos factores. Se produce en interacción de otros dominios, influyen las competencias innatas y las disposiciones y recursos internos del sujeto, así como sus experiencias, la cultura de la sociedad en la que se desenvuelve y la instrucción deliberada que recibe. Los conocimientos y habilidades de los estudiantes, en cualquier dominio, comienzan con conceptos más simples que van haciéndose más complejos con el tiempo y una instrucción efectiva. El aumento en complejidad está en función, además, de la experiencia y la instrucción, de la maduración, con las diferencias significativas individuales en habilidades, disposiciones e intereses.

En sus teorías, Piaget sostiene que algunos de los principales aspectos del desarrollo cognitivo durante las etapas concretas, preoperacional y operacional, tienen que ver con la experiencia lógico-matemática de los niños. Considera que la comprensión matemática proviene de una implicación activa del niño con los objetos físicos reales y no de la enseñanza formal de la matemática. También Vygotsky escribió sobre la experiencia temprana de los niños con las matemáticas y señaló que, antes de entrar en la escuela, adquieren su propia aritmética, que han aprendido en el transcurso de sus interacciones con los demás, en especial con aquellas personas más competentes en conceptos y habilidades culturales. Ambos destacan el rol que desempeña el mundo social en la construcción del conocimiento matemático y conceden más importancia el papel de otros niños, en el aprendizaje de los más pequeños, que al de los adultos.

La investigación sobre el aprendizaje de los niños en los primeros seis años de vida muestra la importancia de las primeras experiencias en matemáticas. Un clima atractivo y estimulante para que se encuentren con las matemáticas, les infunde confianza en su capacidad de entenderlas y usarlas. Las experiencias positivas les ayudan a desarrollar disposiciones como la curiosidad, la imaginación, la flexibilidad, la creatividad y la persistencia, cualidades que contribuyen a su éxito en el futuro, dentro y fuera de la escuela.

5.1. Lenguaje matemático

Algunas teorías del aprendizaje, como las constructivistas y socioculturales (véase capítulo 2), subrayan el papel fundamental del lenguaje para apoyar el desarrollo matemático de los niños y señalan la importancia del discurso matemático como herramienta para aprender esta materia. La investigación ha mostrado una asociación entre la exposición y la frecuencia de uso del lenguaje matemático utilizado por los cuidadores, padres y profesores de los

niños pequeños y el desarrollo posterior de los aspectos importantes de las matemáticas por estos niños. El lenguaje permite la adquisición de nueva información, así como la apropiación de ideas y procesos complejos.

Es, por tanto, importante involucrar a los niños en conversaciones sobre su pensamiento matemático y sus razonamientos. Las conversaciones pueden ocurrir en una amplia gama de contextos, en actividades no planificadas y en actividades planificadas como la narración o lectura compartida. Las interacciones a través de juegos, en grupo, son una situación excelente para fomentar la comunicación sobre las estrategias que están desarrollando o justificar aquello que están haciendo, y pueden llevar a los niños a hacer nuevas conexiones y ampliar su propio razonamiento; también los desacuerdos con sus compañeros pueden ayudar a examinar la exactitud del propio pensamiento. Esta interacción llevará a los escolares a ser menos dependientes del maestro como la única fuente de respuestas. Las conversaciones acerca de los objetos que no están presentes o eventos pasados o futuros sirven de apoyo al desarrollo del razonamiento abstracto.

Las preguntas hechas por el educador pueden ser un estímulo para ampliar el pensamiento de los niños. Preguntas abiertas como: «¿Qué más?» y «Me pregunto qué pasaría si...» pueden llamar la atención a nuevas formas de pensar y de interactuar. Muchas preguntas que se formulan a los niños o que ellos mismos hacen requieren una respuesta vinculada a una acción tipificada como matemática. En la tabla 1.1 recogemos algunas preguntas y las acciones que requieren.

La importancia del vocabulario en el aprendizaje del número, por ejemplo, ha sido estudiada desde el punto de vista del desarrollo cognitivo. Los hallazgos indican que las primeras representaciones cuantitativas están vinculadas al lenguaje propio de la cuantificación y, más concretamente, a los conocimientos de los numerales. En particular, la capacidad de los niños para representar un número exacto está relacionada con la adquisición de habilidades para contar, especialmente con colecciones de pocos objetos o cuando se comparan colecciones con diferente cantidad de elementos.

TABLA 1.1.

Preguntas y acciones asociadas a ellas

Pregunta	Acción asociada
¿Cómo es...?	Describir, establecer atributos.
¿Es más o menos...?	Comparar, ordenar.
¿Cuántos...?	Contar.
¿Cuánto...?	Medir.
¿Dónde...?	Localizar en el espacio.
¿Cuándo...?	Localizar en el tiempo.
¿Por qué...?	Explicar una situación.
¿Qué ocurriría si...?	Formular hipótesis.
¿Para qué...?	Evaluar (fines, medios).
¿Qué es...?	Clasificar (objetos o situación).

Los numerales pueden servir para llamar la atención sobre el hecho de que los conjuntos marcados con la misma palabra numérica son equivalentes en cantidad de objetos. El conteo que comienza como un juego de decir palabras sin sentido, casi como recitar retahílas infantiles, permite llegar a importantes propiedades matemáticas abstractas. A partir de estas experiencias con las palabras de conteo, los niños aprenden el significado de uno, dos y tres de forma individual, en secuencia ascendente; posteriormente, el principio de cardinalidad y los significados de los nombres de los números, en su rango de conteo.

Los maestros deben plantear problemas y hacer preguntas a los estudiantes que provoquen la reflexión sobre su trabajo y la justificación de sus razonamientos. Las actividades de explicar y justificar no sólo pueden mostrar la comprensión de los escolares sino también ayudar a crearla.

ACTIVIDAD 1: Presenta un relato para narrar a niños de 4-5 años. Indica seis preguntas que se les puede hacer sobre ese relato, cuándo y cómo (individual o grupal).

Los educadores bien informados reconocen que, aunque los niños pequeños pueden tener algún co-

nocimiento de los conceptos matemáticos, a menudo carecen del lenguaje necesario para comunicarlo. Al fomentar la charla durante las distintas áreas temáticas, los educadores pueden proporcionar el lenguaje matemático que permite a los estudiantes expresar sus ideas.

Los niños en riesgo de tener dificultades matemáticas, entre ellos los que viven en circunstancias desfavorecidas, pueden necesitar apoyo intensivo adicional para desarrollar el lenguaje y la capacidad de participar en el discurso matemático.

5.2. Comunicación

Por comunicación entendemos la correspondencia que se establece entre dos o más personas mediante el uso del lenguaje.

La necesidad de comunicación de las personas, de interactuar con otras, se aprecia desde el inicio de la vida, cuando el recién nacido muestra una actividad eminentemente social y comunicativa. Se progresa gradualmente en la habilidad de comunicación mediante las interacciones con otras personas, bien con adultas o con iguales. El desarrollo de la habilidad de comunicación de los niños exige la interacción de los hijos con sus padres, en el ámbito familiar, y con el profesorado, en el ámbito escolar. Algunos currículos de Educación Infantil emplazan parte del contenido matemático en el área de la comunicación y la representación. A su vez la comunicación y la representación forman parte de las competencias matemáticas que actualmente se contemplan. Se reconoce, por tanto, la dimensión matemática de la comunicación, que es conveniente fomentar desde la infancia.

La incorporación del niño a la escuela permite mayores posibilidades de comunicación en diversas situaciones y contextos, con interlocutores variados. La escuela debe ser un lugar adecuado para que se manifiesten, ya sea en actividades habituales o en otras especiales como la dramatización. Los escolares deben ser estimulados a narrar sus observaciones, experiencias o alguna historia, y a participar en conversaciones colectivas y diálogos que faciliten la comunicación verbal.

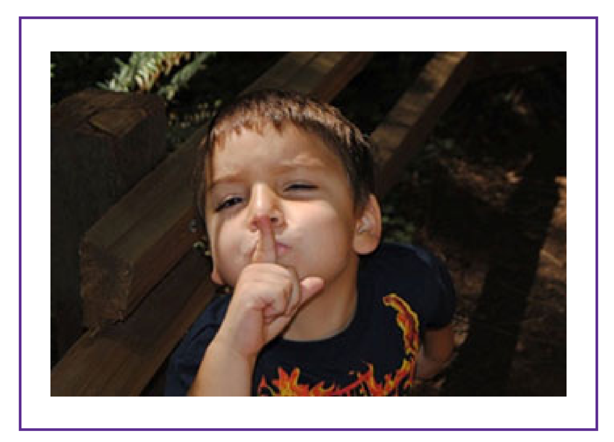


Figura 1.8.—Gesto que indica silencio.

Mantener la clase en silencio sin dar a los niños la posibilidad de expresarse es contraproducente para dicho desarrollo, el cual se fortalece favoreciendo el intercambio de ideas, con acciones como:

- Formular preguntas individualmente a los niños sobre lo que hacen.
- Pedirles que se expresen ante sus compañeros mediante trabajos en grupo. Por ejemplo, elaborar un cuento entre todos para que cada uno vaya añadiendo un poco a lo anteriormente dicho.

5.3. Representación

Consideramos en este capítulo que representar es hacer presente un pensamiento o idea por medio de signos, imágenes, palabras, etc. La representación gráfica relacionada con las matemáticas (o gráficas matemáticas) permite utilizar signos, imágenes, palabras para expresar ideas y pensamiento matemático.

Las matemáticas tienen un lenguaje propio. A veces las matemáticas son consideradas un lenguaje. Los gráficos matemáticos forman parte de la expresión escrita de ese lenguaje, por lo que una enseñanza eficaz debe prestar atención a los aspectos comunicativos de la matemática, desarrollando en los aprendices el lenguaje matemático oral y escrito.

Desde edad temprana, los niños intentan representar sus ideas y dar sentido a su incipiente lenguaje escrito. Muestran una increíble habilidad para coordinar lo que quieren expresar con la forma apropiada de hacerlo. La capacidad infantil de vincular marcas, en principio sin sentido para los mayores, y de comunicarse a través de estas marcas es una etapa importante que es necesario aprovechar en aras de una mejora posterior en su relación con la lectura y escritura simbólica de las matemáticas.

Se considera que para los niños la representación de las matemáticas en papel, a través de la utilización de sus propias marcas, aproximaciones de símbolos, números y otros gráficos, es un ejercicio de alfabetización matemática. Un trabajo sistemático en representación permitirá pasar gradualmente de las representaciones informales al simbolismo abstracto de las matemáticas de la escuela. Asimismo, se sostiene que las representaciones propias infantiles constituyen la base de procesos mentales superiores, ya que mediante experiencias compartidas de gráficos matemáticos en las aulas exploran, discuten, adaptan, internalizan y construyen su comprensión del lenguaje escrito de las matemáticas.

Cuando se defiende el apoyo a acciones de los niños relacionadas con gráficos matemáticos, se diferencia aquella representación que trata de afianzar un conocimiento matemático —es el caso de hacer una representación después de haber realizado alguna actividad práctica— de aquella otra en la que los niños han de representar su propio pensamiento matemático. Se argumenta que el primer tipo de representación es menos potente que el segundo. La investigación ha puesto de manifiesto que trabajar algo con recursos prácticos y representar después tiene un menor nivel de demanda cognitiva, por lo que su valor es limitado en la ampliación del pensamiento matemático. Esto se explica porque los niños no necesitan afianzar algo que ya han trabajado en un contexto de recursos prácticos. En contraste, cuando se anima a los niños a representar su pensamiento matemático, a medida que avanzan en contextos que son significativos para ellos, van siendo capaces de utilizar habilidades de pensamiento de orden superior.

El aprendizaje y el uso de símbolos abstractos y cálculos escritos con comprensión pueden crear dificultades a los niños pequeños a no ser que la enseñanza apoye su desarrollo. Entre las recomendaciones pedagógicas se proponen las siguientes:

- Crear una cultura en la que los niños usen los medios gráficos.
- Propiciar la colaboración, el diálogo y la discusión de los gráficos matemáticos producidos por los niños.
- Discutir con los niños los gráficos matemáticos construidos por ellos. Ayudarles a reflexionar sobre el significado de sus propios gráficos y sobre los de otros compañeros.
- Valorar los gráficos matemáticos de todos los niños.

La elección de gráficos es personal, los niños hacen su propia opción para representar su pensamiento matemático y también dan significado propio a sus representaciones.

Se espera que los niños de entre 5 y 7 años de edad sean capaces de comenzar a representar los conocimientos que tienen, usando símbolos y diagramas simples, así como discutir y explicar su trabajo utilizando el lenguaje matemático.

5.4. Resolución de problemas

Un problema matemático es una tarea en la que es necesario indagar para obtener la solución, ya que de antemano no se conocen los medios para llegar a ella. El proceso de resolución de problemas de matemáticas abarca mucho más allá que completar ejemplos presentados con palabras o imágenes. Los problemas incorporados al final de una lección (por ejemplo, la suma) en realidad son ejercicios para la práctica de la habilidad de la operación, más que problemas. Los problemas matemáticos en la escuela infantil no son sólo aquellos que aparecen escritos en el papel y exigen la realización de una operación para llegar a la solución. Se trata de planteamientos que presentan un reto para los niños que es necesario superar mediante acciones o toma de decisiones. Los problemas estarán inmersos en situaciones de su medio o de juego.

La resolución de problemas y el razonamiento constituyen el centro de las matemáticas. Junto con las competencias de comunicación, el establecimiento de conexiones y la representación, conforman un conocimiento matemático de calidad.

La resolución de problemas es un componente crítico del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años. La resolución de problemas significativos contribuye a desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior y a descubrir un repertorio de estrategias que prepararán para resolver nuevos problemas. Los niños adquieren sentido de las ideas matemáticas mediante la participación activa en la resolución de una variedad de problemas matemáticos ricos. Pueden ser problemas tradicionales con «historia», pero también problemas no rutinarios, problemas basados en patrones, que contemplen movimiento y forma. Cada uno de los casos desarrollará habilidades diferentes. Por ejemplo, los problemas que se centran en la secuenciación y la realización de combinaciones crean la necesidad de trabajar de forma sistemática y desarrollar el pensamiento lógico. Los problemas serán propuestos por los educadores, aunque en algunos casos los plantearán los mismos niños al centrar su pensamiento en algún concepto matemático particular.

Dos consideraciones se hacen cuando se aconseja introducir la resolución de problemas en el currículo de Educación Infantil:

- La resolución de problemas ofrece a los niños oportunidades para dar sentido a los conceptos matemáticos que están aprendiendo mediante el uso de sus propias estrategias, ya que deciden cómo proceder.
- Los problemas «ricos» o valiosos pueden resolverse de muchas maneras, ya que a menudo tienen más de una respuesta correcta, lo que puede animar a los estudiantes a pensar más allá de la aplicación de sus conocimientos básicos.

Estas consideraciones avalan que los niños pequeños deban experimentar y trabajar con problemas que admitan varias soluciones y que les proporcionen oportunidades para el desarrollo de diferentes estrategias y habilidades de razonamiento. Estas habilidades dotarán a los escolares de confianza y competencia sobre la resolución de problemas.

Para preparar las situaciones en las que los niños resuelvan problemas, se recomienda que los docentes presten especial atención a nociones matemáticas familiares, procurando que el desafío resulte atractivo a los niños. Deben proponer situaciones diferentes, incluyendo la observación de elementos matemáticos en el medio ambiente y en las rutinas diarias insertando los problemas en ellas, y plantear actividades que sean imaginativas y agradables.

Durante el proceso de resolución de problemas, los educadores han de estar muy atentos para apoyar a los niños en el desarrollo de su comprensión y su razonamiento; mostrar interés por cómo los niños resuelven los problemas y valorar sus diferentes soluciones, y darles suficiente tiempo para desarrollar la tarea. El adulto tiene que resistir cualquier tentación de decir a los niños lo que han de hacer o imponer sus ideas sobre lo que están haciendo. Su labor consiste en entender lo que el niño está haciendo y pensando y apoyarlo para que avance en el desarrollo de sus ideas y su conocimiento.

Resuelto el problema, el maestro animará a los niños a expresarse, describiendo razonadamente lo que han hecho. Al hacerlo, los niños hablan sobre matemáticas, lo que les ayudará a organizar sus pensamientos y a familiarizarse con el lenguaje matemático. Mediante el razonamiento, tal vez utilizando argumentos lógicos, pueden ir más allá de la descripción de lo que han hecho y explicar por qué lo hicieron. Representar el proceso que han seguido les ayudará a construir un registro de lo hecho que es valioso ya sea como ayuda para sí mismos, para explorar las matemáticas usadas en ese momento o para comunicar a otra persona lo conseguido.

Un ejemplo de situación para escolares de 4 años en el que se les propongan y resuelvan algunos problemas es el siguiente. La maestra muestra a los niños una canasta con diez animales de peluche, no excesivamente grandes. Les pide que los observen y puede hacer algún comentario sobre los gustos de los niños por las mascotas y los peluches. A continuación plantea una pregunta: ¿cuántos animales hay en la canasta? Cuando los niños han

dado su respuesta (procurar que todos lo hagan), plantea una nueva pregunta: ¿hay suficientes para dar un animal de peluche a cada uno de los niños de la clase? Para llegar a la solución del problema los niños pueden: discutir entre sí por parejas, hacer una votación o recibir ayuda de la maestra, la cual no dará la solución sino que planteará nuevos interrogantes como: ¿cómo haremos para saberlo?, ¿por qué sabes que eso que dices es así? Finalmente se cuentan los animalitos conforme se sacan de la canasta y se pueden repartir para comprobar si se ha llegado a dar alguna respuesta correcta. Si han faltado peluches, hacer hincapié en los que hay y preguntar: ¿cuántos faltan para que cada niño tenga uno? ¿cómo conseguirlos? Para finalizar la tarea se pedirá a dos o tres niños que expliquen lo que hicieron y por qué lo hicieron. Todos realizarán una representación de la experiencia.

ACTIVIDAD 2: Propón una situación que consideres matemáticamente rica, para escolares de 5 años, uno de cuyos objetivos sea trabajar la resolución de problemas. Describe cómo se realizaría y los problemas que propondrías a los escolares.

6. DIFICULTADES

Algún niño puede tener dificultades para realizar ciertas tareas matemáticas. Estas dificultades suponen retraso en sus trabajos respecto a sus compañeros, y el no seguir el ritmo lleva, a veces, al desánimo y la desmotivación. Es necesario investigar las causas de dichas dificultades, que pueden ser múltiples. En ocasiones, el obstáculo radica en la aversión que muchos padres y maestros tienen hacia las matemáticas o en la escasa confianza que les inspira. A menudo los niños tienen una extraña habilidad para sentir el confort —o la aversión— de un adulto con ciertas cosas, y las matemáticas no son una excepción. Es necesario también considerar que algunas destrezas matemáticas requieren capacidades no matemáticas, como habilidades de motricidad fina, uso de la memoria, comprensión de la lectura de un texto, que pueden ser el origen de la dificultad.

Se recomienda analizar todas las fortalezas y debilidades académicas de los escolares en la búsqueda del origen de una posible dificultad con las matemáticas. Si el problema se percibe grave, hay que consultar con los especialistas. En cualquier caso, es necesario preparar un plan de estudios que se adapte a las necesidades de cada estudiante y las aborde.

Algunas pautas pueden ayudar a tratar a los estudiantes en riesgo de tener dificultades con las matemáticas; por ejemplo:

- Utilizar la información que proporciona la evaluación del aprendizaje de los estudiantes.
- Proporcionar retroalimentación clara y específica a los padres de los logros en matemáticas de sus hijos.
- Recurrir a compañeros como tutores.
- Animar a los estudiantes a verbalizar sus pensamientos o sus estrategias, incluso las estrategias que son explícitas.
- Enseñar explícitamente estrategias, no sólo hechos o habilidades.
- Animar a los estudiantes a pensar en voz alta y proporcionarles retroalimentación de los compañeros y del profesor.
- Destacar los aspectos clave de cada tipo de problema (no «palabras clave»).
- Usar *software* de alta calidad y tareas de indagación.
- Incluir trabajo individualizado; puede hacerse por períodos breves, como un componente de intervención focalizada.
- Considerar la posibilidad de sesiones de tutoría en grupos pequeños.
- Incluir el uso de objetos concretos para promover el aprendizaje conceptual.
- No olvidar la geometría y el sentido espacial. Muchos de los estudiantes con necesidades especiales de aprendizaje tienen necesidades no sólo numéricas.
- Individualizar la instrucción.
- No esperar a que los estudiantes controlen un dominio (por ejemplo, la aritmética) para es-

tudiar de manera significativa otro (como la geometría).

Es necesario probar estas pautas para comprobar su eficacia, pues no todos los estudiantes con dificultad responden de la misma manera. La evaluación permite conocer el progreso del alumnado, que es importante controlar, sobre todo en el caso de aquellos con algún tipo de necesidad especial.

ACTIVIDAD 1: Supón que trabajas con niños entre 4-5 años. Detectas que en un juego en el que se utilizan dos dados un niño cuenta siempre los puntos de las caras para saber cuántos le han salido, y si los dos dados presentan la misma puntuación, cuenta en los dos casos los puntos.

a) Indica si este gesto del niño revela que tiene alguna dificultad.
b) Señala cómo sería tu actuación con este niño.

7. ENSEÑAR MATEMÁTICAS EN LA INFANCIA

Si, como estamos indicando, es necesario dedicar mayor atención a las matemáticas en los programas escolares de la infancia, es importante que los maestros de educación infantil conozcan el uso de métodos apropiados para trabajar con los niños de corta edad.

Se indica que el método de enseñanza tradicional no consigue proporcionar a los escolares un conocimiento matemático potente. Para fomentar la mejora del conocimiento matemático se recomienda que la enseñanza siga otros métodos, y se señalan aquellos que fomentan la indagación por parte del estudiante como los más adecuados. Son métodos que hunden sus raíces en el constructivismo. Entre los principios que rigen estos nuevos métodos destacan los siguientes:

- El docente preparará la instrucción con intencionalidad, es decir, perseguirá ciertos objetivos de aprendizaje.
- Las acciones a realizar por los escolares han de serles significativas.
- Dichas acciones estarán orientadas a la indagación.

En este enfoque de enseñanza, el profesorado prepara tareas, a menudo complejas, que sean de interés para los estudiantes, que les motiven, que les creen la necesidad de realizarlas y que les lleven a aprender las matemáticas a través de la práctica que supone resolverlas. Esto es hacer y experimentar las matemáticas en contexto. El papel del profesorado, en este tipo de estrategias, es ayudar a los escolares a construir nuevos conceptos o procedimientos sobre lo que ya saben y a reflexionar sobre lo que están aprendiendo. Durante el desarrollo de la tarea se debe involucrar a los niños en la toma de decisiones; en el planteamiento de conjeturas; en la resolución de problemas; en el uso de razonamiento inductivo y deductivo, y en comunicar sus ideas, hallazgos y conclusiones. El docente ha de alentar a los niños a descubrir y hacer por sí mismos todo cuanto sea posible; centrarse en promover el aprendizaje significativo en lugar del aprendizaje memorístico, para lo cual ha de promover y construir sobre conocimiento matemático informal de los niños y encauzarlos a ver patrones y relaciones. Este enfoque basado en la indagación requiere por parte de los educadores mucha imaginación y estar atentos al aprendizaje que se produce y vigilantes para que todos los estudiantes progresen. Su recompensa puede ser un aumento significativo de la competencia matemática de los niños.

ACTIVIDAD 1: De forma caricaturizada se presenta la actuación de dos maestros en su aula.

Maestro A. «Tomamos el libro de fichas por esta página (enseña a los niños un libro abierto) y tenemos que señalar lo que está más cerca y lo que está más lejos de la pelota».

Maestro B. Ha planificado que se va a centrar en introducir o reforzar los conceptos de cerca-lejos de objetos entre sí. Ha preparado la siguiente situa-

ción: unos cochecitos diferentes (cada niño tiene un coche que identificará como «suyo») y una pista por la que hacerlos correr (puede ser el suelo del aula); gana quien logre en la tirada acercar más el coche a la meta. Los niños juegan en grupos de cuatro. Se organiza un torneo en el que los vencedores de los primeros equipos vuelvan a jugar, hasta finalizar con un único ganador.

a) Comenta la riqueza de las actuaciones de los maestros A y B.
b) Analiza y comenta qué otros conocimientos (además de las nociones cerca-lejos) se pueden movilizar a partir de las tareas propuestas por ambos maestros.

ACTIVIDAD 2: Supón que en una clase de niños de 5-6 años descubres que uno no consigue aprender a través de la realización de proyectos salvo si éstos se hacen en grupo. Indica qué medidas adoptarías con ese niño.

ACTIVIDAD 3: Busca en Internet información (dos artículos, al menos) sobre enseñanza de las matemáticas en infantil. Realiza un comentario sobre los dos artículos encontrados que recoja: el tema del artículo, sus aspectos más relevantes y las conclusiones a las que se llega.

7.1. Situaciones

Hay una variedad de situaciones cotidianas en las que se trabajan las matemáticas en contexto. Por ejemplo, tareas como el control de la asistencia a clase, comparando la cifra de niños que han faltado con los asientos que quedan vacíos, o los cumpleaños de los niños, comparando los años que tienen, quiénes tienen más o menos, cuántos más o menos, pueden ser situaciones ricas de explotar. Los rincones como el de los juegos o el de la literatura infantil pueden dar lugar a situaciones de aprendizaje en matemáticas. La literatura infantil puede proporcionar otra fuente rica y entretenida de problemas y contenido de aprendizaje matemático.

La elaboración de un proyecto, como construir un establo para albergar a ciertos animales o una cama en la que acostar a una muñeca, puede dar lugar a resolver algunos problemas matemáticos. Las actividades de la vida diaria de los preescolares ofrecen numerosas oportunidades para practicar y aprender matemáticas. La preparación y salida para hacer una excursión o visita cultural puede ser aprovechada desde el ámbito matemático. No olvidar que las preguntas de los niños pueden proporcionar momentos de aprendizaje de incalculable valor.

7.2. Artefactos

Un creciente cuerpo de investigación en educación matemática, centrado en experiencias de aula, ha tratado de esclarecer la función de los artefactos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. En el análisis de resultados, encontramos que los autores dan dos versiones contrapuestas sobre el beneficio de su uso: *a*) los artefactos proporcionan oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje y *b*) los artefactos limitan dichas oportunidades. Entre los artefactos nos fijamos en los objetos concretos y en la tecnología y señalaremos algunas ventajas e inconvenientes que se les atribuyen.

Objetos concretos

Se cree que el uso de objetos concretos, o material manipulativo, ayuda a los estudiantes a aprender matemáticas. La investigación apoya esta posición basándose en la constatación de que los estudiantes que usan objetos manipulativos en sus clases de matemáticas a menudo superan en conocimientos a los que no lo hacen. Pero los investigadores también advierten sobre el hecho de que los materiales manipulativos, por sí solos, no garantizan el éxito.

Las acciones sobre los objetos promueven conocimiento y pueden ayudar en la enseñanza sólo

si ésta subraya las ideas que se pretenden fomentar. Los objetos físicos pueden ser manipulados sin que muestren los conceptos que representan. Los materiales concretos pueden ayudar a los estudiantes a construir significado, pero los estudiantes deben reflexionar sobre sus acciones con estos objetos. Dicho de otra manera, la comprensión no se produce sola, transmitiéndose a través de la mano y el brazo, cual corriente eléctrica. Necesita educadores que hagan reflexionar a sus alumnos sobre las representaciones de las ideas matemáticas y conseguir que los estudiantes pasen de las acciones concretas al pensamiento matemático abstracto. Idealmente, los materiales manipulativos pueden ser usados como herramientas de aprendizaje para ayudar a los estudiantes a desarrollar su comprensión, y explicar su forma de pensar a los demás. Pero necesitan reflexionar sobre sus acciones con objetos manipulables, cosa que se puede hacer por medio de la discusión, articulando el significado que generan.

Un entorno cuidadosamente planificado y preparado para el aprendizaje de las matemáticas ha de contemplar el uso de materiales manipulativos. Los productos pueden ser comerciales o bien objetos procedentes de otros usos, aportados por los propios estudiantes.

La investigación ofrece pautas para que el uso de materiales concretos sea más efectivo:

- Los modelos manipulativos son un apoyo sensorial, son útiles en la medida en que ayuden a los estudiantes a investigar y entender las estructuras matemáticas y los procesos.
- Los modelos manipulativos sirven como representaciones. Los estudiantes han de interpretar el objeto manipulado como la representación de una idea matemática. Por ejemplo, conectando el trabajo realizado con regletas (números en color) con las relaciones numéricas.
- Pasar, en cuanto sea posible, al uso de dibujos y símbolos de los conceptos matemáticos trabajados. Una vez que el material ha cumplido su función, su uso no produce beneficio.



Figura 1.9.—Regletas Cuisenaire, material manipulativo con que explorar conceptos numéricos.

Tecnología

El ordenador permite manipular objetos que se representan en una pantalla; no son objetos concretos, por lo que puede parecer extraño considerar las imágenes de ordenador una manipulación válida. No obstante, la manipulación en el ordenador puede ser, a veces, más poderosa que la manipulación con objetos reales o físicos. Ciertos beneficios se señalan a la manipulación informática. Quizá la característica más potente del *software* informático es que la posible acción con el *software* encarna los procesos que se quiere que los estudiantes desarrollen e interioricen como acciones mentales; otros beneficios son:

- Abstraen las ideas y procesos matemáticos implícitos en los objetos manipulables ya que la flexibilidad del *software* permite manipular mentalmente mejor que los objetos físicos. Por ejemplo, algunas aplicaciones ofrecen flexibilidad para explorar las figuras geométricas en formas no disponibles en material concreto. También se puede cambiar el tamaño de las formas sin alterar otros atributos.
- Permiten más precisión y exactitud que el trabajo de papel y lápiz.
- Permiten asimismo la grabación y reproducción de las acciones de los estudiantes. Las

computadoras pueden grabar y reproducir secuencias de acciones de los estudiantes y éstos, a su vez, hacer modificaciones, fomentando la reflexión matemática.

Con ambos tipos de artefactos, objetos manipulativos físicos e informáticos, se deben elegir representaciones significativas en las que los objetos y acciones disponibles para el estudiante sean paralelos a los objetos matemáticos (ideas) y acciones (procesos o algoritmos) que se pretende que se aprendan. Además, es necesario guiarlos para que hagan las conexiones entre estas representaciones.

También la televisión educativa tiene efectos positivos en el aprendizaje. Estudios longitudinales han mostrado que los estudiantes de secundaria que vieron la televisión educativa durante su infancia presentaron grados más altos de comprensión matemática que aquellos que no lo hicieron.

ACTIVIDAD 4: Busca en Internet un *software* para educación infantil. Descríbelo indicando el potencial que crees que tiene para aprender conceptos matemáticos.

7.3. El juego en el aprendizaje de las matemáticas en educación infantil

Se ha dicho del juego que es una acción simbólica y significativa, viva, agradable, voluntaria, gobernada por reglas. El juego es una forma natural de explorar el mundo por los individuos más jóvenes y exige el dominio de aquellas habilidades necesarias para hacer frente a dicha exploración. Durante el juego, los niños tienen la oportunidad de participar en experiencias e interaccionar con el mundo físico y social, por lo que están activos y pueden construir conocimientos a partir de esas experiencias. El juego está en el mundo del niño, y su práctica le permite un crecimiento y desarrollo integrales.

Los niños aprenden a través del juego, participan activamente en las experiencias que les proporcionan los juegos y que son importantes para ellos, dando así significado al propósito de esas experiencias.

El juego es esencial para los niños, y puede convertirse en la puerta de entrada a la participación en la indagación matemática proporcionando un contexto en el que poder explorar las matemáticas dentro de situaciones que son relevantes e importantes para ellos, por lo que la exploración será significativa.

Las experiencias matemáticas en el juego pueden presentarse de dos formas: participando en juegos que involucran a las matemáticas o jugando explícitamente con las matemáticas mismas.

En el primer caso, los juegos proporcionan una manera natural y entretenida de explorar posibilidades matemáticas y practicarlas. Invitan a los niños a experimentar las matemáticas, ya que jugar es describir y pensar acerca de su mundo (ocurre en un juego de tiendas en el que unos venden y otros compran).



Figura 1.10.—Tienda.

En el segundo caso, realizar juegos de matemáticas puede ser una forma divertida de responder a pregunta interesantes o practicar habilidades matemáticas fundamentales (a través del juego, los niños exploran patrones, formas y relaciones espaciales, comparan magnitudes, cuentan objetos).



Figura 1.11.—Material manipulativo que permite jugar con ideas matemáticas.

Se han establecido vínculos entre las características del juego y el desarrollo del conocimiento y la comprensión matemática. Basándose en estos vínculos, los programas para la primera infancia de aquellos países que han incluido más matemáticas han aumentado su juego de nivel superior.

Lo anteriormente dicho no significa que los maestros deban hacer que los niños dediquen todo el tiempo escolar a juegos, sino que los juegos se consideren tareas importantes para el aprendizaje. Los profesores pueden elegir juegos para trabajar un concepto o practicar una habilidad particular. Los educadores han de proporcionar juegos relacionados con las matemáticas que permitan el uso de un repertorio de estrategias y que garanticen la plena inclusión y participación de los estudiantes. En ocasiones han de ser tareas abiertas y paralelas que permitan diferenciación, para satisfacer las necesidades de todos los niños.

El juego, por sí solo, no es suficiente. Si bien mediante el juego los niños llegarán a descubrir una cierta cantidad de conocimiento a través de su propia exploración, para que lleguen a alcanzar su máximo potencial necesitan ayuda de un adulto, del educador.

Ahora bien, el educador ha de actuar con cautela, pues, si bien la orientación de los adultos desempeña un papel importante en la construcción de aprendizaje por los niños, demasiada guía de un adulto puede ser contraproducente y conseguir que la vía del desarrollo del niño esté completamente dictada por aquél. Cuando el control del juego se hace lejos de los niños, deja de ser un juego. El juego debe ser controlado y dirigido por los jugadores. De hecho, los niños a menudo se fijan desafíos mucho más difíciles si se les da el control de su aprendizaje que si lo hacen los adultos, pero deben ser supervisados por el educador, que contribuirá a conseguir que el efecto del juego sea el deseado.

El adulto presente durante el juego ha de ser capaz de reconocer cómo los niños están representando sus conocimientos de matemáticas y contribuir a su comprensión a través de ayudas y cuestionamientos. No debe subestimar la importancia de la elección de los juegos haciendo una adecuada planificación para la edad de los niños.

Actividad 5: Describe dos juegos populares que conozcas indicando su potencial para el aprendizaje de conocimiento matemático.

8. ALGUNOS CONSEJOS PARA EL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Recogemos como conclusión de todo lo expuesto en este capítulo unos consejos para los educadores matemáticos de infantil:

- Conocer el plan de estudios y los documentos de apoyo. Vigilar que el plan de estudios sea coherente y contemple relaciones e ideas matemáticas potentes.
- Aprovechar las experiencias de los niños y su conocimiento intuitivo sobre su persona y su familia, pues serán la base de nuevos aprendizajes, e indagar en los aspectos emocionales, lingüísticos, sociales y culturales que presentan porque influirán en dichos aprendizajes.
- Observar cuidadosamente la participación de los niños en actividades cotidianas y juegos

con el fin de identificar sus conocimientos matemáticos y analizar cómo encaja dicho conocimiento en los planes de estudio.
- Utilizar los intereses espontáneos de los niños como punto de partida para establecer situaciones de aprendizaje.
- Atender los aspectos afectivos y emocionales de los escolares hacia las matemáticas.
- Aumentar el interés natural de los niños por las matemáticas y su disposición a dar sentido a su mundo físico y social a través de ellas.
- Instituir programas de matemáticas desafiantes y emocionantes para todos los niños, no sólo para los privilegiados. Los niños procedentes de minorías desfavorecidas también deben ser atendidos con programas matemáticamente enriquecedores. Independientemente de la clase social, la cultura o alguna discapacidad, la mayoría de los niños desarrollan habilidades matemáticas.
- Facilitar aquellas prácticas que fortalezcan la resolución de problemas y los procesos de razonamiento, así como la comunicación y la conexión de ideas matemáticas.
- Prever tareas en las que los niños interactúen sobre ideas matemáticas importantes.
- Integrar las matemáticas con otras actividades y otras actividades con las matemáticas.
- Considerar que los niños merecen algo más que hojas de fichas o páginas de un libro.
- Proporcionar materiales y juegos y preparar contextos en los que puedan explorar y manipular ideas matemáticas.
- Plantear regularmente tareas que valgan la pena (por ejemplo, que inviten a la reflexión y a hacer preguntas o plantear problemas interesantes) y alentar a los niños a responder o resolver ellos mismos.
- Promover la reflexión en lugar de proporcionar información. Cuando los niños tienen dificultad para llegar a una solución o llegan a una incorrecta, dar consejos, hacer preguntas y fomentar su pensamiento en lugar de simplemente darles la solución correcta.
- Fomentar el diálogo de igual a igual. Algunas veces los niños pueden explicar ideas o estrategias de matemática informal a un niño mejor que a los adultos.
- No limitar el aprendizaje de las matemáticas sólo a actividades de juego. También los niños pueden aprender en situaciones de orientación artística y actividades que respondan a un desafío.
- Introducir los conceptos matemáticos mediante métodos y estrategias de enseñanza diferentes. Incluir estrategias para desarrollar un pensamiento más avanzado y para el trabajo con niños especiales.
- Estimular y fomentar la charla sobre las matemáticas.
- Favorecer y estimular la representación creativa y el uso de símbolos no convencionales inventados por los niños,
- Identificar conocimiento matemático para usarlo diariamente e integrarlo en la instrucción. La introducción y la incorporación diaria de tareas matemáticas son esenciales para cualquier programa que se precie de tener alta calidad para la infancia.
- Ayudar a los niños a establecer conexiones entre diferentes tipos y áreas de conocimiento con el objetivo de que cada estudiante estructure y dé coherencia a su conocimiento matemático.
- Ayudar a los estudiantes a transformar sus conocimientos matemáticos centrados en acciones de la vida diaria en una comprensión más formal que se pueda transferir y aplicar a otras situaciones.
- Fomentar actitudes positivas, como la autoeficacia y el compromiso. Estas actitudes desempeñan un papel decisivo en el éxito del estudiante.
- Evaluar continuamente el conocimiento, las habilidades y estrategias matemáticas de todos los niños. Reconocer si el pensamiento del estudiante se está desarrollando o se ha estancado. Si se está desarrollando, es conveniente observar y dejar a los estudiantes trabajar. Si se ha estancado, formular preguntas de sondeo que le provoquen pensar en formas alternativas de actuación.
- Procurar estar conectados con los padres en la medida de lo posible y trabajar juntos para ase-

gurar que cada niño aprenda de los muchos aspectos de las matemáticas que se encuentran en el aula, en el hogar y en la comunidad.

- Involucrarse en la interacción, la creación de redes y el intercambio con los compañeros y colegas.
- Los grupos de personas que a menudo requieren una atención especial en la enseñanza de las matemáticas son los niños «excepcionales» (aquellos con discapacidades de desarrollo o que son especialmente dotados para las matemáticas). Es necesario hacer frente a sus necesidades individuales, por ejemplo, preparando tareas que presenten varios niveles de desafío.

ACTIVIDAD 1: De la encuesta referida en la actividad del apartado 1 de este capítulo, otros resultados han sido:

a) Los niños aprenden matemáticas sólo por la interacción con objetos concretos.
b) Los profesores deben proporcionar un entorno físico rico y dejar que los niños jueguen y desarrollen su pensamiento matemático.
c) La evaluación en matemáticas es irrelevante cuando se trata de niños pequeños.

Comenta, de forma justificada, tus acuerdos y desacuerdos con estas tres creencias.

Enseñanza y aprendizaje 2

JOSÉ GUTIÉRREZ
ENCARNACIÓN CASTRO

Carmen (3 años, 7 meses) cuenta los puntos de las caras de los dos dados con los que juega con su hermana para conocer quién gana la partida. Después de varias partidas, en una tirada dice, sin contar:

He ganado yo pues en tus dados hay cinco puntos en cada uno, y en los míos hay en uno cinco y en el otro seis.



Figura 2.1.—Preparación de la acción educativa.

Los profesores toman decisiones en su trabajo diario que influyen en el rendimiento de sus alumnos. En la mayoría de los casos la posición que toman para elegir unas u otras tareas y realizarlas de una determinada forma la adoptan basándose en la creencia de que su actuación dará buen resultado. Esto se debe a que las creencias suelen estar basadas en la experiencia, en la intuición y en los buenos deseos del profesor, en el éxito de su trabajo. La didáctica de la matemática entiende que esto no es suficiente. La tarea de profesor es demasiado seria para andar haciendo especulaciones y dejando en manos de la percepción personal las resoluciones sobre la labor educativa. Las decisiones que tome el profesor tendrán más probabilidad de ser acertadas si están asentadas en los cimientos que les proporcionan las teorías existentes sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ésta es la razón por la que en este capítulo recogemos algunas nociones sobre dichas teorías que consideramos componentes básicos de la formación de maestros.

Una vez estudiado este capítulo, debes ser consciente de las competencias que has adquirido y mostrar pruebas de familiaridad con los hallazgos derivados de la investigación contemporánea sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en orden a tres dimensiones.

Saber: Mostrar familiaridad con descriptores conceptuales como constructivismo, conductismo, cognitivismo, teorías del aprendizaje, teorías de la enseñanza, teorías prácticas, teorías descriptivas, modelos didácticos, análisis didáctico, trayectorias hipotéticas de enseñanza-aprendizaje, escuela inclusiva, diversificación curricular y evaluación, aplicados a la alfabetización matemática.

Saber hacer: Mostrar competencia que te permita realizar planificaciones curriculares globalizadoras de alfabetización matemática, trabajar en equipo de forma coordinada y diseñar intervenciones de enseñanza ricas que estimulen y promuevan la construcción autónoma de conocimientos por parte de los alumnos.

Saber ser: Mostrar actitudes favorables hacia los modelos de innovación curricular centrados en el aprendizaje por descubrimiento y la construcción del conocimiento matemático basados en la investigación.

ACTIVIDAD 1: Lee el párrafo siguiente, ponte en el lugar de esta estudiante de grado de infantil y escribe cómo demostrar a la profesora que con el proyecto que se describe se pueden trabajar las matemáticas.

Una casa para grillos

Durante el período de prácticas, Maite, estudiante del grado de Educación Infantil, ha recogido y sistematizado sus observaciones en un diario. Éste es parte del relato que ofrece:



Figura 2.2.—Jaula para grillos.

En un viejo tronco del jardín de la escuela infantil, los alumnos mayores han construido un refugio-vivienda real para grillos. Los pequeños lo han visitado y se han mostrado encantados. Algunos imitan el sonido que produce el grillo: cri, cri, criiii...

La profesora me comenta: «Maite, míralos: ¡están entusiasmados!, ¡ojalá hubiese surgido este centro de interés al comienzo de curso!». Enseguida me pone a prueba, me pregunta si yo pienso que con esta idea se podría hacer algo relacionado con las matemáticas. Contesto un sí rotundo y ella me responde: «Adelante, toma la iniciativa, el aula es tuya». Yo hago ahora de profesora. Hemos dibujado en grupo un mural con los planos de la casa de los grillos, los muebles de los grillos, las habitaciones de los grillos... Se ha votado

en asamblea y adoptado la decisión de que para el curso siguiente construiremos una casita para grillos en el rincón de proyectos. Uno de los grupos ha explicado los resultados de la votación disfrazándose de números. Con dibujos han hecho un mapa de votaciones para el libro de clase con los siguientes resultados: menos de la mitad no estaba de acuerdo, unos cuantos pensaban que mejor una casa para cochinillas, otros pocos que gusanos de seda, lombrices o mariposas como las del Parque de las Ciencias; lo cierto es que más de la mitad pensaba lo contrario. Alguno ha propuesto las tortugas, pero nadie ha hablado de iguanas, caracoles o camaleones. Todo esto lo han representado a su manera, de forma creativa. Al acabar la clase, hemos dibujado en la pizarra electrónica tres símbolos secretos pensando que al volver en septiembre nos acordemos de retomar el proyecto.



Figura 2.3.—Símbolos dibujados en la pizarra electrónica.

ACTIVIDAD 2: Analiza la temática de este capítulo e identifica limitaciones y lagunas formativas que crees que tienes en relación con ella.

ACTIVIDAD 3: Escribe al menos tres expectativas de aprendizaje que tengas para este capítulo.

1. LAS TEORÍAS DE LA ENSEÑANZA Y DEL APRENDIZAJE

Enseñar no es lo mismo que aprender. En la práctica son dos actividades complementarias e inseparables. Enseñar matemáticas es una responsabilidad que la sociedad confía plenamente a los maestros por ser los profesionales cualificados para el ejercicio de esa misión. Aprender matemáticas es una tarea que asume activamente el alumnado en las diferentes etapas de su escolarización bajo la tutela y motivación de sus maestros, en la interacción con sus compañeros de clase y en colaboración con otros agentes e instituciones sociales que contribuyen a ese fin.

Cada uno de estos dos verbos, «enseñar» y «aprender», está relacionado con un tipo de teorías del campo psicoeducativo que sirven de soporte y fundamento a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dos tipos de teorías con las que los maestros de educación infantil deben estar muy familiarizados para poder organizar sus decisiones curriculares con conocimiento de causa e intervenir con profesionalidad, sacando el mayor provecho a las situaciones de enseñanza-aprendizaje que se dan a diario en el aula. Las referidas al aprendizaje se denominan teorías descriptivas, y las referidas a la enseñanza, teorías prácticas. Las dos contribuyen de manera positiva a la formación de los maestros de infantil, permitiéndoles organizar los recursos adecuadamente, administrar el tiempo, planificar el trabajo en el aula o atender las demandas de inclusividad, diversificar tareas y gestionar imprevistos. Todo ello sobre la base de los avances de la investigación más reciente en el campo de la psicología, la neurociencia, la sociología y la pedagogía.

ACTIVIDAD 1: Elabora un resumen (máximo 300 palabras) de tus conocimientos previos sobre teorías de la enseñanza y del aprendizaje.

Una síntesis comparada de las características diferenciadoras de los dos tipos de teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje se presenta en la tabla 2.1.

Las teorías descriptivas o explicativas aportan información sobre el aprendizaje y la naturaleza de la evolución y el desarrollo infantil, sobre los modelos de razonamiento, sobre las distintas estrategias utilizadas por los escolares al realizar sus tareas, sobre las fases que se siguen en la negociación para que un grupo de niños lleguen a establecer acuerdos, sobre las diferentes maneras de entrenar la memoria a corto y largo plazo. Son teorías que informan sobre las etapas que siguen los escolares de una misma edad en su desarrollo evolutivo, sobre los obstáculos que se encuentran en la adquisición de conocimiento, sobre las trayectorias reales o hipotéticas que recorren o deberían recorrer los estudiantes para aprender diferentes contenidos matemáticos. Estas teorías pretenden modelizar las manifestaciones del pensamiento infantil. Son resultados de la investigación disponible que intentan dar explicaciones generales, detectar inconsisten-

TABLA 2.1

Características diferenciadoras de las dos teorías

Teorías del aprendizaje	Teorías de la enseñanza
• Son teorías descriptivas, explicativas. • Sirven para explicar los procesos de aprendizaje y la naturaleza de la infancia. • Ayudan a entender y predecir el comportamiento, la motivación, las actitudes y la evolución cognitiva de los niños. • Aportan modelos universales y reglas generales para explicar el razonamiento, el comportamiento, las motivaciones, actitudes e interacciones infantiles. • Se obtienen a partir de la investigación psicológica y sociológica en contextos naturales o en escenarios de laboratorio más o menos artificiales.	• Son teorías prácticas, fundamentadas. • Sirven para fundamentar la enseñanza y las decisiones de planificación curricular. • Ayudan a diseñar las tareas y construir los programas de intervención en el aula. • Aportan modelos locales fundamentados en el estudio de buenas prácticas y la experiencia de profesores eficaces e innovadores. • Se obtienen a partir de la investigación pedagógica en contextos naturales de aula.

cias, limitaciones o irregularidades y predecir comportamientos universales aplicables a diferentes momentos y situaciones de aprendizaje.

Por su parte, las teorías prácticas, fundamentadas o prescriptivas dan recomendaciones normativas para la acción, son más locales y sirven de soporte a las decisiones de los profesores sobre su actuación en el aula. Proporcionan al profesorado seguridad y confianza acerca del éxito potencial de una tarea, le ofrecen pistas experimentadas sobre cómo: innovar en clase; planificar la enseñanza; organizar las actividades a proponer y secuenciarlas, elegir materiales, y usar los instrumentos de evaluación adecuados a cada edad, momento, situación y tarea. Es decir, tratan todos los elementos de la práctica educativa. También se conocen como teorías fundamentadas porque han sido construidas sobre la experiencia, sobre las evidencias de las buenas prácticas de profesores experimentados e innovadores que obtienen resultados satisfactorios en su trabajo diario, que saben motivar a sus estudiantes, que proponen tareas adaptadas a su nivel de maduración, que consideran las ideas previas, errores, dificultades como punto de partida, que diversifican las tareas en función de las necesidades de cada estudiante, que promueven un modelo de enseñanza-aprendizaje activo, que estimulan la indagación autónoma de los alumnos en la construcción de su aprendizaje.

Estas teorías ponen de manifiesto que enseñar investigando y aprender investigando son dos aspectos actuales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

ACTIVIDAD 2: Establece relaciones entre teorías de la enseñanza y teorías prácticas, teorías del aprendizaje y teorías descriptivas. Señala algunas diferencias entre estos dos grupos de teorías.

2. UTILIDAD DE LAS TEORÍAS EN LA PLANIFICACIÓN CURRICULAR

El profesor ha de tener dominio de las teorías y llevar a cabo un proceso de integración de las mismas estableciendo las conexiones que se muestran en la figura 2.4, lo que ha de permitirle entender con profesionalidad el mundo de la educación infantil, tomar consciencia del rol activo que ha de asumir como profesional autónomo que concibe la enseñanza como un proceso sistemático de intervención y, a la vez, como un trabajo continuado de investi-

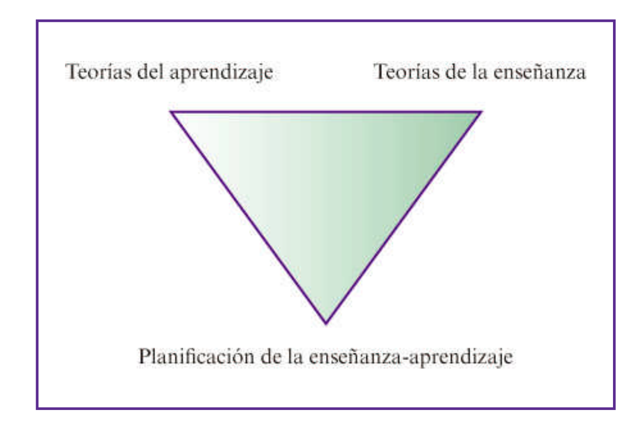


Figura 2.4.—Diagrama que visualiza la integración de las teorías.

gación, innovación y coordinación, apoyándose en lo que aportan estos dos tipos de teorías al trabajo cotidiano del aula.

La organización e integración de ambos grupos de teorías en la planificación ordinaria del aula de educación infantil requiere un proceso de análisis didáctico que permitirá al maestro construir sus programas concretos de intervención bajo parámetros de éxito, que orienten su trabajo hacia una verdadera alfabetización matemática centrada en la adquisición secuenciada de competencias específicas desde la primera infancia.

ACTIVIDAD 1: El maratón de contar grillos

Marcos (5 años), niño de la clase donde Maite hace sus prácticas, ha contado a su padre lo siguiente:

> *Los niños de la clase no saben contar grillos. Hemos hecho un maratón de contar grillos y dicen que en la pecera de arriba hay los mimos grillos que en la de abajo. Yo no estoy de acuerdo: arriba hay más grillos porque están más juntos, porque tienen más espacio y quién sabe si detrás de estos que vemos no habrá algunos más, escondidos. Además, no se dan cuenta de que los de abajo son más grandes; por eso parece que hay los mismos grillos en las dos peceras.*

A partir de la argumentación anterior de Marcos, discute con un compañero de clase qué aportan las teorías de la enseñanza-aprendizaje a la intervención en situaciones como la descrita y otras similares.

Planifica situaciones de experimentación (y, si tienes posibilidades, llévalas a la práctica) con muñecos o tarjetas con fotos de grillos, reemplaza las tarjetas por una imagen (dibujo, pictograma o símbolo) u objetos figurados que representen a los grillos (chapas, canicas, botones, fichas de parchís, piedrecitas, garbanzos, habichuelas, guisantes, lentejas, macarrones...). Investiga cómo influye en los razonamientos y argumentaciones de niños de distinta edad, hasta los 6 años. Para motivar a los estudiantes en la tarea invita a los niños a colorear sus grillos o hacerlos de plastilina. Se pueden presentar en modelos lineales, como se muestra en la figura 2.5, y otras formas de organización espacial.

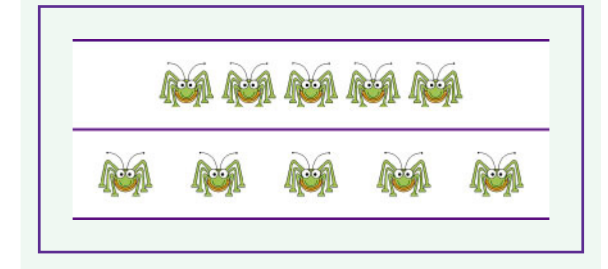


Figura 2.5.—Disposición de objetos en dos líneas con diferente separación.

3. TEORÍAS DESCRIPTIVAS QUE FUNDAMENTAN EL APRENDIZAJE

En términos generales, entendemos por aprendizaje el proceso mediante el cual una persona adquiere o modifica sus ideas, conocimientos, habilidades, estrategias, destrezas, creencias, actitudes, hábitos, conductas o valores. Todo ello se produce desde los primeros años de vida, a partir de un conjunto de experiencias espontáneas, mezcladas con situaciones formales y organizadas que permiten adquirir, con cierta estabilidad, esquemas de pensamiento estables

cada vez más potentes. Dichos esquemas nos permiten movernos por el mundo, actuar sobre él, representarlo y comunicarnos.

Las teorías descriptivas recogen los aportes científicos contemporáneos que hacen diferentes disciplinas y líneas de investigación sobre el aprendizaje y sus tipos, el desarrollo cognitivo y los estilos de procesamiento de la información. Este libro (capítulo 1) destaca que la alfabetización matemática representa una de las competencias clave que ha de permitir a la ciudadanía afrontar los retos de vivir en una sociedad en continua transformación. De ahí la importancia que tiene conocer que el desarrollo cognitivo se inicia tempranamente y se explica a partir de una serie de etapas y estadios que lo condicionan y caracterizan.

Hay acuerdo unánime en que cada uno de estos momentos relevantes (períodos, etapas o estadios) reúne una serie de características que progresivamente dan coherencia al pensamiento humano permitiéndole interaccionar con el mundo físico y simbólico, usar lenguajes de distinta naturaleza para comunicarse con sus semejantes y actuar con sentido de propósito, estableciendo relaciones de causa-efecto y anticipando consecuencias. La observación sistemática ha permitido reconocer hitos en la maduración psicomotora, lingüística, mental, emocional y social.

Conocer las características propias de cada etapa permite al profesor de matemáticas entender el comportamiento de los escolares en cada nivel educativo, dar significado a sus acciones, reconocer limitaciones, responder adecuadamente las preguntas que formulan, atender sus intereses, descifrar sus motivaciones y, sobre todo, programar situaciones de aprendizaje estimulantes, divertidas y provechosas.

Las teorías del aprendizaje evolucionan y cambian con el paso del tiempo. Los avances contemporáneos de la investigación social y psicoeducativa permiten diferenciar teorías y momentos relevantes en el desarrollo cognitivo infantil, destacando contribuciones fundamentales de cada teoría que son útiles para el profesor. Este hecho provoca la necesidad de actualización continuada de los profesores que contemple los resultados de la investigación.

Entre las principales teorías descriptivas que fundamentan el aprendizaje humano destacamos: el conductismo, el cognitivismo y el constructivismo. Cada una de ellas ofrece una visión singular acerca de la naturaleza del conocimiento, la forma en que se adquiere y lo que significa conocer. Bajo estas premisas se diseñan programas de enseñanza sujetos a las reglas de cada teoría que obligan a los profesores, y a los alumnos, a ajustarse a sus directrices.

ACTIVIDAD 1: Formula una definición de aprendizaje que incorpore las matemáticas y su contribución al desarrollo de capacidades humanas.

3.1. Conductismo

El conductismo entiende que el aprendizaje se produce cuando se perciben cambios en la conducta, ya sea en la forma o a la frecuencia. El aprendizaje se considera logrado cuando se muestra una respuesta apropiada a un estímulo específico. Para el conductismo, el conocimiento matemático es un conjunto de técnicas y datos a recordar que, en sus primeros niveles, se adquieren estableciendo asociaciones entre ellos. Una persona posee conocimientos cuando tiene mucha información memorizada y es capaz de recordarla. Las dos leyes universales en que se basa esta corriente son la ley del ejercicio (la asociación entre determinados estímulos repetidos en el tiempo hace que aparezca una misma respuesta) y la ley del efecto (el refuerzo positivo contribuye a que determinadas conductas se den con mayor frecuencia). De acuerdo con estos principios del conductismo, la enseñanza de las matemáticas es un adiestramiento en la relación estímulo-respuesta. Aprender matemáticas es un proceso mecánico por parte del alumno que irá copiando de manera fiable todo lo que se le proponga. El modelo conductista promueve un enfoque instrumental y mecanicista del aprendizaje de las matemáticas; considera los hechos, destrezas y conceptos matemáticos piezas centrales del aprendizaje. Los escolares deben memorizar definiciones, reglas y rutinas operatorias que deben ejecutar con rapidez y precisión. El alumno es el responsable de su fracaso,

y el error no se contempla; el profesor asume un rol magistral, y se enfatiza el trabajo individual; aprendizaje y juego no son compatibles. Las expectativas de aprendizaje se enuncian en forma de objetivos específicos de consecución inmediata y no contempla la orientación del aprendizaje hacia la consecución de una competencia matemática hacia el final del proceso formativo.



Figura 2.6.—Exposición del profesor.

ACTIVIDAD 2: Resume en tres ideas clave las aportaciones de la teoría conductista al aprendizaje de las matemáticas y describe al menos dos limitaciones.

3.2. Cognitivismo

Para el cognitivismo, la esencia del conocimiento matemático es la estructura, y ésta se forma a través de conceptos unidos entre sí por relaciones que llegarán a configurar un todo organizado. El conocimiento se obtiene, por tanto, mediante la adquisición de relaciones, y el aprendizaje se consigue por uno de estos dos procesos: por asimilación y por integración. La asimilación consiste en establecer relaciones entre las informaciones nuevas y las que ya posee el sujeto; la integración se basa en conexiones entre trozos de información que permanecían aislados. Una persona llega a poseer conocimiento cuando es capaz de crear relaciones. El énfasis en esta teoría se pone en promover el procesamiento mental. La teoría cognitiva parte de los siguientes principios: estimular la formación de relaciones como una manera de dotar de significado a las acciones, no dando importancia al aprendizaje mecanicista ligado a la memorización; ayudar a establecer conexiones y a modificar puntos de vista, de manera que se pueda conectar la nueva información con los conocimientos que el alumno posee; estimular, favorecer y aprovechar la matemática inventada por los niños, ya que son creativos, idean sus propias matemáticas y no se motivan si lo que han de hacer es imitar de forma pasiva a los mayores.

La teoría aconseja a los profesores tener en cuenta que:

- El aprendizaje significativo requiere tiempo para consolidarse.
- Las capacidades de los individuos y la preparación de cada niño en todo momento pueden ser distintas, y habrá que considerarlo, ya que es poco probable que se dé un aprendizaje significativo si un niño no tiene los conocimientos necesarios para asimilar una nueva enseñanza.
- Los juegos dan a los niños la oportunidad natural y agradable de establecer conexiones y dominar técnicas básicas y pueden contener un valor incalculable para estimular tanto el aprendizaje significativo como la memorización, por lo que es aconsejable explotar el interés natural de los escolares por el juego.
- El profesor tiene mucho que ver en el fracaso de los escolares, pues su misión es poner al estudiante en situación de aprender, para lo cual deberá diseñar, crear y proporcionar situaciones de aprendizaje ricas.
- En la clase tienen cabida exposiciones y debates de trabajo realizados por los alumnos.
- Se da gran importancia al uso de material en el aprendizaje, y el juego se toma como una actividad fundamental en este proceso.



Figura 2.7.—Atención de una profesora a sus estudiantes.

ACTIVIDAD 3: Prepara una situación de carreras de grillos con circuitos diferentes y materiales de distinto tipo. Formula preguntas con tus compañeros y, si tienes ocasión, haz la experiencia con niños de más de 5 años.

Por ejemplo: arrastrar con un hilo a *dos grillos* a través de dos tubos de papel o cartulina, uno de 40 cm y otro de 55 cm, de tal manera que ambos arranquen y salgan a la vez. Preguntar a los niños: «¿Cuál de los dos ha ido más deprisa?». Repetirlo, pero esta vez sin tubos y sobre unas marcas en la mesa, de la misma longitud.

ACTIVIDAD 4: Resume en tres ideas, las que consideres de mayor interés, las aportaciones de la teoría cognitiva al aprendizaje de las matemáticas y describe al menos dos limitaciones.

3.3. Constructivismo

El constructivismo se considera continuación del cognitivismo, sin que exista una ruptura entre estas dos teorías. Una de sus diferentes variantes es el constructivismo social o socioconstructivismo. Los supuestos filosóficos subyacentes al constructivismo se basan en que el conocimiento está en función de cómo el individuo crea significados a partir de sus experiencias.

Destacamos, por su importancia, algunas aportaciones del constructivismo al ámbito del aprendizaje de la matemática escolar:

- El aprendizaje escolar implica la construcción de múltiples significados y evoluciona de forma progresiva hasta alcanzar un estatus de conocimiento estructurado y estable.
- El aprendizaje es una actividad cognitiva inseparable del medio sociocultural y tiene lugar entre varias personas: es mediante la interacción como los niños se apropian de la cultura y reorganizan sus esquemas mentales, asignando significados coherentes a los instrumentos cognitivos de su época.
- Los alumnos aprenden de una manera activa, elaborando significado y atribuyendo sentido a sus acciones y pensamientos, y no sólo reviviendo y acumulando pasivamente información.
- Desempeñan un papel fundamental en el aprendizaje, la interacción, la reorganización de significados y la comunicación con otras personas.
- La comunicación y la argumentación verbal en el aula adquieren un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático. Estas capacidades constituyen el principal vehículo para elaborar y compartir significados acerca de los símbolos, representaciones, magnitudes, conceptos y lenguajes matemáticos.
- El trabajo de planificación del profesor y su intervención promueven una construcción guiada de los significados de los contenidos matemáticos en un marco sociocultural concreto.
- Los conocimientos previos e informales constituyen el punto a partir del cual el profesor organiza y planifica la enseñanza.
- El aprendizaje matemático adquiere valor en contextos de uso real que van más allá del dominio mecanicista de reglas, rutinas algorítmicas y vocabulario. Desde esta perspectiva, se enfatiza un enfoque funcional de las matemáticas escolares en que las situaciones problemáticas y la resolución de problemas constituyen una parte esencial de un currículo contextualizado.

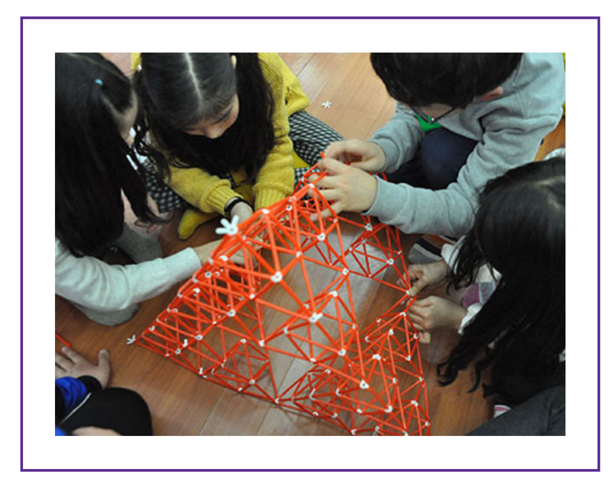


Figura 2.8.—Estudiantes trabajando en colaboración.

Actividad 5: Resume en tres ideas las aportaciones de las teorías del constructivismo al aprendizaje de las matemáticas y describe al menos dos limitaciones.

En respuesta a ¿en cuál de estas teorías es más eficaz apoyarse para la enseñanza de las matemáticas?, algunos teóricos responden que cada una de ellas aporta beneficios. La teoría conductista enfatiza la práctica, el refuerzo y la retroalimentación para incrementar el aprendizaje y la memoria; las categorías cognitivas ligadas a la comprensión y los valores hacen que el aprendizaje sea algo más que simples acciones. La teoría constructivista contempla la capacidad de los estudiantes para adaptarse y aprender de su medio, aun cuando las situaciones no sean controlables y los problemas estén sujetos a la inventiva y la improvisación. Todo ello favorece la discusión y la negociación social.

Actividad 6: Algunos autores se han destacado por su aportación al aprendizaje de las matemáticas, entre ellos Dienes, Mialaret y Piaget. Busca en Internet información sobre cada uno ellos y elabora un informe (300 caracteres máximo) en el que se destaque su aportación a esta materia.

3.4. Influencia de las teorías en educación infantil

Tiempo atrás, durante años, las teorías del aprendizaje y el desarrollo cognitivo sostenían que los niños pequeños no adquieren conocimientos matemáticos hasta el nivel de primaria. Esta idea estaba unida a la creencia de que el conocimiento matemática comienza con la notación abstracta de la aritmética: números (1, 2, 3...) y símbolos aritméticos (+, –, =...). También la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget sostenía que el conocimiento matemático se inicia, en los niños, en el período de operaciones concretas (6-7 años). En ambos casos la imposibilidad de adquirir conocimientos matemáticos aconsejaba no dedicar atención a la enseñanza de esta materia en educación infantil. Se impusieron estas teorías durante varios años y la investigación básica no se centró en buscar evidencias sobre los conocimientos matemáticos iniciales que poseen los niños, sino en aquello que no les era posible hacer.

Una aportación importante del constructivismo ha sido sostener que los primeros conocimientos matemáticos se muestran a los niños en su interacción con los objetos concretos. Partiendo de esa idea, los investigadores se centraron en conocer cómo se origina y se desarrolla el conocimiento matemático. Diseñaron tareas que podían realizar niños cada vez más pequeños y en las que se involucraba conocimiento más restringido y menos abstracto que para el nivel de primaria y continuaron la búsqueda de competencia matemática de los niños en los primeros años.

La investigación realizada en las últimas décadas ha revelado que el conocimiento matemático comienza en la infancia y presenta un amplio desarrollo durante los primeros cinco años de la vida. Este conocimiento incluye habilidades sobre la secuencia numérica y el recuento, resolución de problemas aritméticos, razonamiento espacial y conocimiento geométrico y algebraico asociado a los patrones. Estos resultados han cambiado el punto de vista de los teóricos sobre las matemáticas que los niños pequeños pueden llegar a conocer. Conocimiento que se suele llamar prematemática o matemática informal.

A partir de la teoría de Vygotsky, la investigación se centró en el estudio del desarrollo cognitivo desde un enfoque sociocultural, tratando la influencia de la sociedad y de la cultura en la evolución del pensamiento matemático inicial de los niños y destacando el papel que desempeñan las interacciones con el medio ambiente, la importancia de lo ambiental, junto a los factores biológicos y el juego, en el desarrollo cognitivo, en general, y en el conocimiento matemático, en particular. En la última década la investigación basada en esta teoría está en expansión.

4. TEORÍAS PRÁCTICAS Y MODELOS DIDÁCTICOS

La docencia es una actividad profesional que se nutre de teorías prácticas. Las teorías prácticas actuales conciben la enseñanza como un proceso de innovación e investigación continuado sobre la base de situar a los escolares ante experiencias reorganizadoras que permitan un desarrollo integral y equilibrado y favorezcan una maduración progresiva del pensamiento, que den significado a los procesos de interacción con el mundo, a la representación de los fenómenos y al uso de estrategias de comunicación y que emplean tanto lenguajes creativos como sistemas convencionales más o menos formalizados. Este tipo de enseñanza conlleva un trabajo sistemático, cuyo inicio debe situarse en la etapa de educación infantil.



Figura 2.9.—Asamblea.

Entre las teorías prácticas destacan aquellas sobre el currículo que llevan asociados modelos didácticos y ofrecen recomendaciones útiles acerca de cómo debe ser planificada, guiada y organizada la enseñanza en su estructura global para derivar en aprendizajes consistentes, estimulantes y duraderos. Planificación adaptada a las necesidades de todos y cada uno de los alumnos y que contemple las particularidades de cada aula y de cada contexto sociocultural.

El profesor, asumiendo un rol activo, se compromete con un modelo didáctico o estrategia de planificación curricular basado en las evidencias de investigación disponibles, que le permiten:

- Sistematizar las decisiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de forma rigurosa, integrando y dando significado a los hallazgos y resultados de investigación de las teorías anteriormente mencionadas.
- Organizar el currículo de forma creativa, con alto grado de autonomía, de modo que convierta su trabajo en un ciclo continuo de innovación y reflexión crítica sobre las decisiones tomadas al respecto.
- Asumir un papel de investigador en el aula sobre sus procesos de enseñanza y desarrollar propuestas de aprendizaje en las que cada estudiante sea el protagonista de la construcción de su propio conocimiento. Esta perspectiva docente parte de un enfoque que promueve la investigación por parte del alumno y la construcción de aprendizajes significativos inspirados en la indagación y el descubrimiento.
- Diseñar situaciones creativas, participativas, divergentes y plurales, pensadas con posibilidad de diversificar las exigencias de enseñanza-aprendizaje; inspiradas en una didáctica activa con fases recurrentes de manipulación, dramatización, argumentación verbal, representación, abstracción, simbolización, con apoyo de materiales convencionales y nuevas tecnologías, que permitan al alumno investigar con sus iguales, discutir y construir conocimientos matemáticos en contextos funcionales ligados a la vida real.

Es importante considerar que la formación del docente para realizar esta labor requiere tanto llegar a alcanzar una competencia avanzada de los conceptos, de las estructuras matemáticas y de sus significados como complementar y enriquecer dicha competencia con el conocimiento didáctico, el cual aporta sentido desde la dimensión práctica de la enseñanza.

4.1. Análisis didáctico

El análisis didáctico es un método cuya finalidad es fundamentar, dirigir y sistematizar el conocimiento didáctico para planificar, poner en práctica y evaluar la enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos específicos, en un contexto cultural determinado y en una etapa concreta, atendiendo las directrices normativas establecidas por la administración educativa. El análisis didáctico facilita la transferencia de resultados de la investigación a la planificación del trabajo docente. Trabaja con diferentes tipos de organizadores, entre los que destacamos los siguientes:

- Sistemas de representación, que comprenden los procesos de visualización, empleo de dibujos, notaciones gráficas y simbólicas y sistemas de signos.
- Contextos de uso y fenomenología de los conceptos que aborda, los fenómenos que los originan, las situaciones en las que se aplican, y que dotan de sentido a los contenidos.
- Sentido matemático, relativo a las prioridades del dominio conceptual, su evolución histórica, definiciones, procedimientos, estructura.
- Capacidades a desarrollar con el manejo de estrategias de distinta naturaleza y la resolución de problemas.
- Expectativas de aprendizaje, limitaciones, dificultades conceptuales, diagnóstico y tratamiento didáctico de los errores.
- Prioridad en el empleo de recursos y medios tecnológicos, en su selección y uso.
- Fomento de actitudes positivas hacia las matemáticas, tales como satisfacción con las tareas bien hechas, con la construcción coherente de argumentos, con la elección de instrumentos objetivos y equitativos, búsqueda de la verdad y apreciación de la belleza en las realizaciones matemáticas.

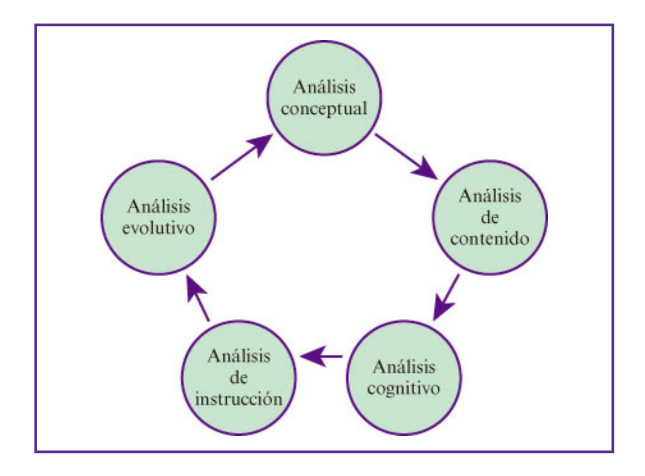
Los organizadores muestran la complejidad de los procesos de trasmisión y construcción de conocimiento matemático y ofrecen al profesor un marco útil para la realización de su labor.

ACTIVIDAD 1: A partir de la pregunta formulada a un niño de 4 años: ¿hay más tiendas que «chuches» o más «chuches» que tiendas?, establece una estrategia de respuesta que use la representación como organizador. Traslada la propuesta a otros contextos de uso fenomenológico: patas que grillos, grillos que jaulas, ruedas que coches, patas que mesas, maestros que escuelas, casas que personas.

Análisis didáctico y planificación curricular

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Está compuesto por el análisis conceptual, el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo de la práctica docente. El ciclo completo responde a un proceso formado por cinco eslabones de un bucle que transcurren de manera diacrónica o sincrónica y sostienen una dialéctica de análisis-síntesis. Cada eslabón lleva asociada una tarea de síntesis integradora en función de unas acciones que le dan sentido y le otorgan significado contextual.

- Análisis conceptual: trabaja con definiciones y formulaciones simbólicas, trata de examinar la diversidad de significados y las posibilidades de conexión entre términos y lenguajes, usa ejemplos y contraejemplos, emplea analogías y términos evocativos en vez de pruebas, revisa los conceptos y nociones básicas del conocimiento matemático, sus fundamentos, evolución histórica, génesis y desarrollo.



- Análisis de contenido: permite identificar, organizar y seleccionar los significados relevantes de un concepto matemático a efectos de planificación. Analiza la estructura interna de la comunicación, su contenido semántico, la diversidad de significados escolares de los conceptos y los procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto, ya sea texto escolar, discurso del profesor o producción de los alumnos.
- Análisis cognitivo: determina las expectativas de aprendizaje de los escolares, su alcance en el largo, medio y corto plazo y su vinculación con los fines de etapa; define las dificultades de aprendizaje y analiza limitaciones previsibles acompañadas de propuestas para su tratamiento.
- Análisis de instrucción: permite la concreción en el cómo y cuándo de los dos análisis anteriores a las condiciones de aula, departamento o centro, ofreciendo respuestas precisas sobre tipos y secuencias de tareas, materiales y recursos, organización y gestión del aula.
- Análisis evaluativo: atiende cuatro ámbitos: los criterios e instrumentos de evaluación, los rendimientos y resultados alcanzados, la toma de decisiones para la revisión del proceso de enseñanza y aprendizaje y la adopción de mejoras e innovaciones.

El análisis didáctico ofrece una visión sistémica del proceso de planificación curricular que, en su trabajo de planificación ordinaria, el maestro está obligado a realizar. Dicha planificación contempla que en unos casos será el propio profesor solo quien trabaje por su cuenta; en otros, el trabajo lo llevará a cabo con el equipo de profesores del centro, en un formato de investigación-acción participativa; también se considera un proceso de colaboración externa con investigadores expertos en el campo de la educación matemática, los cuales pueden participar con diferentes grados de responsabilidad, en cada uno de los cinco elementos del bucle.

4.2. Trayectorias hipotéticas de enseñanza-aprendizaje

Trayectoria hipotética de enseñanza-aprendizaje es una descripción genérica de la evolución del pensamiento de los estudiantes, en un dominio matemático concreto. Incluye fundamentalmente tres componentes: un conjunto de objetivos matemáticos y pedagógicos claros (metas o expectativas de aprendizaje), un camino claramente marcado a través del plan de estudios a lo largo del cual los escolares pueden recibir ayuda para alcanzar esa meta y un conjunto coherente de actividades de instrucción o tareas, adaptado a los niveles de pensamiento matemático de los estudiantes y a su experiencia previa, que apoyan estos objetivos matemáticos. En la práctica, constituye un diseño preliminar de las actividades de instrucción, preparadas con intencionalidad, al cual seguiría un experimento de enseñanza, y finalizará con un análisis retrospectivo de todo el proceso. Las trayectorias hipotéticas de enseñanza-aprendizaje, para los primeros niveles educativos, toman los resultados producidos por la investigación sobre cómo evoluciona el pensamiento de los estudiantes, con el tiempo, a partir de ideas informales hasta alcanzar un entendimiento cada vez más complejo.

Están basadas en las teorías constructivistas y socioculturales del aprendizaje, las cuales se plasman en la creencia de que la comprensión de un individuo tiene como base la organización de sus experiencias. A través de la construcción de significados de estas experiencias se pasa a entendimientos más sofisticados. Esto indica que la actividad y las

experiencias son fundamentales para el proceso de aprendizaje. La visión sociocultural hace hincapié en que la instrucción es esencial en el desarrollo de la comprensión del estudiante. La adecuada planificación de tareas, la selección de materiales y el uso de representaciones influyen profundamente en cómo aprenden los estudiantes.

Los niveles a alcanzar en el aprendizaje, que presenta una trayectoria de enseñanza-aprendizaje, son probabilidades esperadas y no prerrequisitos o etapas exigidas. Es una predicción acerca de las respuestas previsibles de los alumnos ante las tareas matemáticas. El profesor ha de identificar qué se espera que el niño haga con la información que se le proporciona, qué procesos se supone van a desencadenar las tareas propuestas y, en definitiva, qué tipo de evidencias permiten constatar que la integración de nuevos conocimientos ha tenido lugar. Este modelo considera el aprendizaje como un aumento continuo de la comprensión, en el tiempo, y no como una dicotomía de lo que hacen correcto o incorrecto. Se basa en la investigación, tanto para determinar las progresiones de desarrollo de los estudiantes como para la elección de las tareas a trabajar.

La evaluación en una trayectoria de enseñanza-aprendizaje busca entender cómo se ha desarrollado el pensamiento matemático de los estudiantes con el tiempo, diagnosticar la comprensión alcanzada, describir el progreso en términos de niveles de creciente especialización y proporcionar a los profesores información sobre la instrucción en lugar de informar simplemente sobre los niveles de logro.

Algunos autores son críticos con este modelo de planificar la enseñanza, razonando que cuando se elige la opción de centrarse en las trayectorias, se acepta un modelo que considera que el aprendizaje se desarrolla de una forma predecible, de una manera secuenciada, cuando en realidad esto no es así de simple, ya que está reconocida la complejidad del aprendizaje por investigadores y educadores. A su vez, las trayectorias de enseñanza-aprendizaje se centran en dominios específicos de desarrollo conceptual y pueden estar limitadas en la caracterización de otros aspectos valiosos del currículo de matemáticas. Presentamos en la tabla 2.2 una trayectoria hipotética de enseñanza/aprendizaje como ejemplo.

TABLA 2.2

Trayectoria hipotética de enseñanza-aprendizaje: primeros marcos espaciales de referencia

Expectativa de aprendizaje: *construcción de los marcos iniciales de referencia. Referencia respecto a un objeto y respecto al sujeto*				
Edad Años	**Nombre del nivel**	**Nivel**	**Acción del niño**	**Actuación del educador**
1	Discriminación de perceptivas.	1	Primeras percepciones visuales y auditivas.	Proporcionar variedad de estímulos visuales y auditivos (objetos que se muevan en su entorno y música no estridente).
1		2	Primeras percepciones visuales y manipulativas.	Proporcionar variedad de estímulos visuales y manipulativos (objetos con diferente textura).
2	Exploración de su entorno.	1	Nociones de dirección, localización de objetos y personas.	Proponer tareas de búsqueda de objetos fácilmente localizables.

TABLA 2.2 *(continuación)*

Edad Años	Nombre del nivel	Nivel	Acción del niño	Actuación del educador
		2	Orientación en itinerarios simples.	Programar recorridos por diferentes estancias para que el niño las recorra.
3	Referencia a un objeto.	1	Nociones de posición de un objeto respecto a otro: encima y debajo de...; dentro y fuera de...	Proponer al niño situar y buscar objetos indicando posición relativa a otros.
4		2	Nociones de distancia de un objeto respecto a otro: cerca y lejos de...	Realizar juegos en los que se lancen objetos cerca o lejos de otros.
5	Referencia corporal.	1	Nociones de derecha e izquierda de sí mismo.	Bailar al ritmo de una canción que hable del brazo derecho e izquierdo, y del pie derecho e izquierdo.
		2	Distinción de lo que hay delante y detrás de sí mismo.	Jugar a buscar con la mirada objetos cuya posición tenga como referencia el propio cuerpo.

4.3. Trabajo por proyectos

El trabajo globalizado es una opción curricular muy aceptada en educación infantil. Los proyectos permiten trabajar las matemáticas en un contexto integrado de conocimientos disciplinares de diferentes áreas, tomando como referencia un tópico común. El proyecto va tomando forma en la medida en que se proponen actividades integradoras, se definen los contenidos y se delimitan las expectativas de aprendizaje. Los profesores diseñan tareas, preparan materiales y organizan el trabajo del aula a partir de núcleos de aprendizaje o centros de interés propuestos por los escolares o por el profesor. Estos centros de interés normalmente contemplan elementos o situaciones conocidos y atractivos para los niños, como por ejemplo: el agua, las profesiones, el otoño, la ciudad, los insectos... Trabajar sobre tópicos con la metodología de proyectos, rincones y talleres es habitual en las aulas de infantil. Esta metodología permite a maestros y alumnos desarrollar procesos de enseñanza-aprendizaje constructivista centrados en la investigación prolongada y sistemática en el aula con espacios, materiales y herramientas adecuados. Los alumnos aprenden jugando, motivados, experimentan e investigan desde la base de sus propios intereses e inquietudes. Cada proyecto abre un campo de indagación para el profesor y un espacio de construcción de significados e interacciones para los niños.

Para que exista verdadero aprendizaje, el profesor ha de seleccionar adecuadamente los organizadores que han de dar cobertura a esa metodología de trabajo por proyectos. A continuación presentamos un ejemplo de trabajo por proyectos.

Proyecto «Aprendo mates con las mascotas»

Situación inicial. Construimos un tablón con fotos de nuestras mascotas.

- Cada estudiante aporta dos o tres fotos impresas. Establecer algún criterio para organizar las fotos: la mascota que me gustaría tener, la que tuve y ahora no tengo, la que tengo.

- Con carácter rotativo, traer al aula algunas mascotas que no planteen problemas (hámsteres, conejillos de indias, tortugas, pájaros, peces...). Establecer un turno ordenado en el calendario para traerlas al aula. Los peluches de animales pueden ser otra categoría a considerar.
- En un tablón colgar las fotos siguiendo algún criterio sencillo de clasificación (material del que están hechas: de trapo, de peluche...; medio en el que se desarrollan: vivas y reales, de dibujos animados, del cine...) y narrar una breve historia personal de cada mascota al comienzo del proyecto.



Figura 2.10.—Mascotas de trapo y de cine.

Ideas previas de los estudiantes:

- Preguntas espontáneas previas: ¿quién tiene mascota?, ¿qué es una mascota?, ¿cuáles son las ventajas e inconvenientes de tener mascotas?, ¿quién la cuida y cuidados necesarios según tipos?, ¿qué normas tenemos en casa?
- Preguntas matemáticas sobre nuestras mascotas: tipos de mascotas según diferentes características, ¿qué no es una mascota, en qué se parece y en qué se diferencia de otros animales?, ¿desde cuándo la tienes?, diferencias entre mascotas adultas o jóvenes, ¿cuánto come?, ¿quién come más?, ¿cuánto tardará en comerse o en beberse...?, ¿cuánto cuesta mantenerla?, ¿cómo es su espacio vital?...

Trabajamos contenidos matemáticos relacionados con el tiempo, clasificación y ordenación, estimación, representación, estadísticas creativas.

Tareas a realizar en el proyecto integrado durante la semana de la mascota:

- *Tareas de tiempo:* mascotas que tienes ahora (presente), la que tenías antes (pasado) y la que te gustaría tener (futuro). El calendario de visitas de mascotas en el aula y llevar un registro sistemático de los turnos que permita trabajar con el calendario. Los días que faltan para traer la mía. Las edades que tienen y el tiempo medio que viven.
- *Tareas lógico-matemáticas:* agrupamientos de fotos según diferentes criterios: tamaño, lugar donde viven, características de su cuerpo, familia animal a la que pertenecen...; clasificar y hacer grupos según su tamaño y características físicas (número de patas, colores); según el medio donde viven, la forma de desplazarse... Describir las mascotas usando criterios creativos no convencionales y divergentes inventados por los alumnos: mascotas que chillan y que no chillan, mascotas que no cantan ni saltan, mascotas que muerden, mascotas suaves, mascotas que hablan, mascotas educadas...
- Dibujar y representar mascotas con diferentes patas (pájaros, perros, insectos); usamos dibujos y símbolos figurativos.
- Traer al aula una fotocopia de la tarjeta o cartilla de su mascota y analizar la información numérica que contiene y para qué sirve. Algunas mascotas (perros y gatos) tienen un número de identificación en su cartilla que es idéntico al del microchip incrustado en su oreja.
- Moldear mascotas con arcilla o plastilina diferenciando órganos y contando elementos como antenas, patas, alas, aletas.
- Hacer conteos con dibujos sobre las más frecuentes y las menos frecuentes, representar los conteos.
- Inventar preguntas y situaciones-problema relacionadas con la comida, el sueño, la rapidez, el tamaño, el número de crías, el precio en el mercado, el crecimiento, el cuidado...
- Alimentar mascotas. Analizar tipo de alimentación, diferenciar envases según formas y volúmenes. Discutir acerca de ¿quién come más

o menos?, ¿cuánto come cada tipo de mascota?, ¿cómo es el coste de su alimentación?

- Trabajar el espacio vital de una mascota según su tamaño. Podemos delimitarlo con elementos decorativos, con cuerdas o cartones, y escenificar una dramatización en clase o en el patio del colegio.
- Tratar sobre la limpieza y normas de convivencia en casa: comportamientos que se deben permitir a las mascotas y otros que no deben permitirse.
- Identificar huellas de mascotas y descubrir patrones geométricos en ellas.
- Identificar sonidos de mascotas en una grabación. Imitar esos sonidos.
- Jugar a bingo de animales con imágenes, sonidos y huellas para hacer corresponder imagen-sonido-huella.
- Escuchar cuentos, poesías, canciones, rimas, fábulas y adivinanzas con protagonistas animales.
- Inventar lenguajes verbales y no verbales de comunicación creativa para transmitir mensajes relacionados con sus necesidades vitales de comer, de dormir... Jugar a imitar movimientos, gestos y lenguajes de mascotas. Inventar una danza con disfraces.
- Trabajar el lenguaje matemático a partir de una selección de comentarios, fragmentos y frases emblemáticos de algunas de las mascotas famosas del cine (Alf, Beethoven, Lassie), dibujos animados (Piolín, Silvestre, Scooby Doo, Delphy...), series de televisión en las que figuran como actores principales *(La vida secreta de las mascotas, Ace Ventura, Detective Pet, TED, Garfield y la fuerza de las mascotas)*.



Figura 2.11.—Mascotas del cine.

- Identificar iconos que son mascotas. Algunos pintores son reconocidos con un icono que los representa, como la paloma de Picasso. También algunas instituciones u organizaciones usan mascotas como símbolo de sus señas de identidad que les son familiares a nuestros estudiantes. Adena-WWF, por ejemplo, emplea como logo un oso panda. Dibujar esos símbolos tomando como base la forma geométrica envolvente.



Figura 2.12.—Iconos conocidos.

- Visitar la tienda de mascotas del barrio, realizar al vendedor preguntas sobre las que más se venden, compraventa de mascotas en ese barrio y los artefactos que necesita cada una para que no se escapen, para comer, para transportarlas...
- Visitar el supermercado y analizar la sección de comida de mascotas, cómo está organizada, qué variedades hay, cómo son los envases en los que se comercializa. Establecer comparaciones entre las formas geométricas de los envases. Plantear un juego de tiendas en el rincón de juegos con materiales que aportan los alumnos de sus casas, como cajas y botes vacíos de comida, y plantear acciones de comparación y transvase de áridos (alpiste, arena...). Tipos de comida, formas y volúmenes de envoltorios.

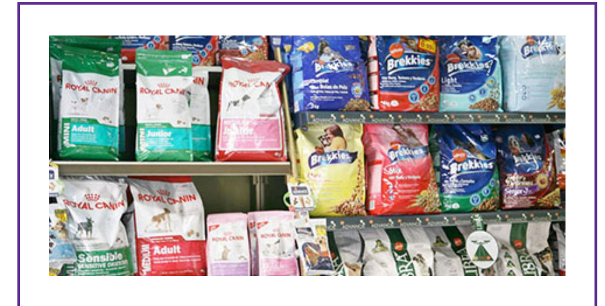


Figura 2.13.—Comidas para mascotas en estantes.

- Comprometer a un padre que trabaja de veterinario a visitar el aula, hablar sobre enfermedades habituales de mascotas caseras, de parásitos, de prevención de enfermedades, abandono, profesiones, venta ilegal, mascotas exóticas (reptiles) y tráfico ilegal de animales, problemas de convivencia con las mascotas...
- Realizar una visita al zoológico (si es posible) y dibujar el refugio donde viven estos animales.
- Visitar un museo y jugar a encontrar mascotas en cuadros de pintores famosos.
- Representar mascotas con diferentes símbolos. Elegir alguna de las mascotas de los Juegos Olímpicos (Cobi) y exposiciones universales (Curro); estos elementos constituyen un icono emblemático de eventos universales, y algunos de ellos pueden ser motivo de trabajo ligado a la representación y simbolización. Muchos de estos iconos se inmortalizan como sellos de correos coleccionables.



Figura 2.14.—Sellos con imágenes de mascotas.

- Recortar las mascotas de las cajas de cereales del desayuno y hacer una colección con los compañeros de clase. Inventa historias matemáticas con estas mascotas. Tomando como base la forma geométrica envolvente de cada una, fabricar un matasellos y usarlo como símbolo de la clase.

5. MATEMÁTICAS INCLUSIVAS Y DIVERSIFICACIÓN CURRICULAR

Entre las competencias del maestro de educación infantil está la de diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad que atiendan a la igualdad de género, la multiculturalidad y el plurilingüismo, la equidad y el respeto a los derechos humanos que conforman los valores universales de formación ciudadana en democracia.

En la dimensión del diseño de la instrucción, el profesor ha de enfrentarse a la diversidad de condiciones actuales que reflejan las aulas de nuestra sociedad: estudiantes con necesidades especiales, diferentes niveles de motivación, identidades étnicas y lingüísticas diversas, distinta maduración cognitiva, limitaciones de aprendizaje no homogéneas, dominio diferenciado de contenidos matemáticos, capacidades de argumentación, representación, verbalización y abstracción, y actitudes variadas ante las tareas matemáticas.

Una enseñanza de la matemática inclusiva es aquella que atiende en su justa medida cada una de las demandas y necesidades del contexto sociocultural y singularidad subjetiva de los estudiantes. Esto exige un sólido compromiso por parte del profesor en la planificación de escenarios, trayectorias hipotéticas, situaciones y tareas de aprendizaje multinivel que permita ubicar a cada estudiante ante retos adecuados a su nivel de maduración e iniciar caminos de aprendizaje que culminen en la construcción de significados desde el gradiente de complejidad que corresponda a su momento de desarrollo. Esto requiere, por el profesorado, disponer de materiales didácticos adaptados, de recursos adecuados, de instrumentos de evaluación rigurosos al servicio de dichos requerimientos, tanto en lo que

respecta al programa formativo o proyecto de trabajo como a las variables individuales objeto de observación y valoración, relacionadas con el aprendizaje de los alumnos. Promover estrategias de diversificación curricular y contemplar una meditada diferenciación de expectativas de aprendizaje, según las características de los estudiantes, son elementos a tener en cuenta en la planificación de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

6. RECURSOS DIDÁCTICOS, MATERIALES Y ESPACIOS EDUCATIVOS

La construcción del conocimiento lógico-matemático es producto de la interacción del niño con su entorno, con sus iguales y con los objetos que promueven y suscitan respuestas internas del sujeto sobre la base de una progresiva abstracción reflexiva y un desarrollo cognitivo estimulante. La búsqueda de regularidades, reglas y relaciones entre los objetos a partir de diferentes situaciones de manipulación, juego y resolución de tareas contribuye activamente al desarrollo de la competencia matemática; de ahí que sean de gran interés los recursos didácticos que se basen en la manipulación, ya sea en situaciones individuales o de grupo. Al hablar de manipulación en la enseñanza de las matemáticas, ha de entenderse que no se trata de una manipulación libre, sino que se hace referencia a una serie de actividades específicas, de tareas secuenciadas con materiales concretos, que facilitan la adquisición de determinados conceptos matemáticos que orientan y estimulan los procesos de abstracción. Las ideas abstractas no llegan de forma espontánea al individuo, ni a través de lo que oye, sino mediante acciones que realiza con objetos y que interioriza mediante la reflexión y que, más adelante, darán lugar a la construcción de una operación mental, sin soporte material.

Es recomendable usar en el aula el material habitual que utilicen los niños en su propio juego. Los juguetes cercanos, como animales, muñecos y coches, son útiles en la medida en que ayuden a establecer relaciones lógicas básicas: agrupar, clasificar, ordenar, seriar, comparar... Hay suficiente evidencia empírica en la investigación disponible que aconseja partir de la manipulación de objetos para pasar a una fase representativa y verbal que abre paso a la construcción de abstracciones y reglas de mayor complejidad. En una fase más avanzada se introducirá de modo progresivo un material estructurado y específico: bloques lógicos de Dienes, regletas de Cuisenaire, geoplanos, ábacos, poliedros, figuras geométricas, instrumentos de medida. Estos materiales no son figurativos y presuponen una mayor capacidad de abstracción, pero a la vez son previos al uso exclusivo de los signos matemáticos.

El material didáctico es necesario en la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades por dos razones básicas: posibilita el aprendizaje real de los conceptos y ejerce una función motivadora para el aprendizaje, sobre todo si con el material se crean situaciones interesantes para el niño en las que se sienta sujeto activo. No existe un criterio unánime acerca del uso y tipo de material a utilizar, incluso pueden encontrarse perspectivas contrapuestas sobre el tema. Hay quien sostiene que debe usarse un material muy estructurado, frente a otras tendencias que afirman lo contrario: utilizar un material poco estructurado y polivalente. Ambos tipos son recursos didácticos útiles. El empleo de uno u otro dependerá de la situación educativa, del proceso evolutivo del niño, del momento de la adquisición del concepto y del tipo de trayectoria hipotética programada. Aunque cada tipo de material estructurado ha sido diseñado para favorecer la adquisición de determinados conceptos, la mayor parte de ellos podría considerarse multiuso, en la medida en que se pueden utilizar para trabajar en varios conceptos y objetivos. El material tampoco es privativo de una edad: puede utilizarse en distintas edades de forma más o menos compleja.

Los objetos de uso corriente que son susceptibles de reciclaje constituyen recursos de gran utilidad. Por su parte, recursos como la música, los cuentos, los juegos y canciones, los acertijos y adivinanzas, barajas de cartas, puzles, materiales deportivos y psicomotores, recursos de dramatización, fotografías, vídeos, películas y nuevas tecnologías, juegos al aire libre son elementos imprescindibles en el aula de matemática. Una misma actividad puede apoyar-

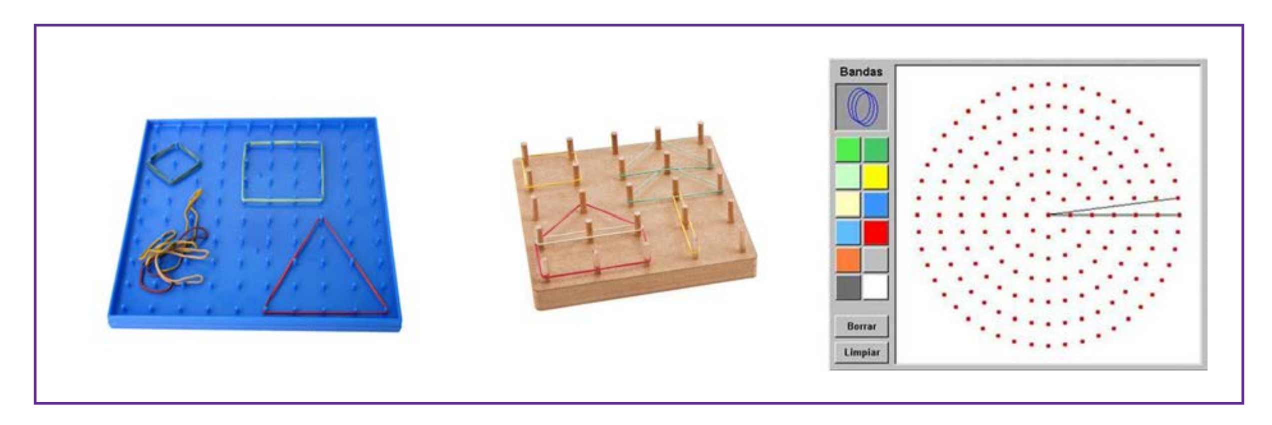


Figura 2.15.—Diferentes geoplanos.

se con materiales diversos, lo que ayuda y favorece el proceso de generalización de conceptos. A su vez, la sociedad actual cuenta con recursos y espacios educativos novedosos que amplían, refuerzan y complementan el trabajo matemático fuera del aula, añadiendo niveles de motivación que enriquecen las limitaciones del medio escolar y permiten un aprovechamiento lúdico-educativo de múltiples posibilidades: parques de ciencia, granjas escuela, aulas de naturaleza, jardines botánicos, centros culturales de interés matemático, huertos escolares, parques y jardines... La mayoría de estas iniciativas poseen programas específicos que permiten trabajar contenidos matemáticos del currículo desde modelos de aprendizaje centrados en la experiencia e investigación del alumno.

ACTIVIDAD 1: Analiza algunos de los recursos digitales disponibles en la red según su utilidad para abordar un determinado contenido matemático.

7. EVALUACIÓN

La evaluación se ha visto, durante tiempo, asociada a una función calificadora que permite decir hasta dónde ha logrado el estudiante los objetivos programados para su aprendizaje. Actualmente se tiene una visión más amplia de la evaluación y se la considera una pieza imprescindible para que el profesor preste al alumnado la ayuda necesaria, valorando las transformaciones que se han ido produciendo en sus aprendizajes.

La consideración del aprendizaje como un proceso, con avances y retrocesos, que presenta dificultades ha llevado a entender la enseñanza como una acción de ayuda a los alumnos. Dicha ayuda necesita de la evaluación entendida como «mirar» y «ver» por dónde y cómo va el aprendizaje.

La evaluación del aprendizaje de los escolares no estaría completa sin el conocimiento de qué ha sucedido en el aula en el período en que se produce ese aprendizaje, o sea, la evaluación de la enseñanza. Tratamos a continuación ambos tipos de evaluación.

7.1. Evaluación del aprendizaje de los alumnos

La idea central de la evaluación de los estudiantes es que debe ser utilizada para obtener información que ayude en la planificación de una instrucción efectiva de la enseñanza para todos los individuos. El profesor puede realizar esta evaluación cuando utiliza un instrumento observacional,

ya preparado, para informarse acerca de la motivación o la manera de trabajar de sus estudiantes, o puede hacerla de manera informal, como cuando cuestiona de manera espontánea a los estudiantes sobre sus métodos de resolución de un problema.

Los criterios de evaluación responden a las capacidades básicas de cada una de las áreas en cada ciclo y están referidos a aquellos contenidos específicos que se consideran especialmente importantes para su desarrollo. Son indicadores sobre diferentes aspectos del avance del alumnado en dicho desarrollo.

En educación infantil la información que se puede obtener mediante la evaluación versa sobre el rendimiento, el pensamiento-conocimiento, el potencial de aprendizaje y la motivación. Rendimiento hace referencia al logro alcanzado por el niño y permite saber si muestra dominio de la materia, si es razonablemente competente con aquello que se pretende que aprenda. Pensamiento-conocimiento, se refiere a los procesos cognitivos que subyacen en la base del rendimiento manifestado y proporciona información sobre si el niño tiene dificultades y dónde puede ser débil su pensamiento. Potencial de aprendizaje se refiere a si el niño está cognitivamente preparado para tal aprendizaje programado. La motivación informa sobre el interés y afecto del niño hacia su trabajo.

A través de la metodología observacional el profesor establece el gradiente de evaluación de logros en cada una de las capacidades consideradas. La técnica del semáforo puede ayudar a visualizar estos logros en términos de avances y limitaciones: 1 = rojo, bajo nivel de adquisición, 2 = amarillo, nivel medio de adquisición, y 3 = verde, alto nivel de logro en la adquisición de las capacidades esperadas, expresadas en evidencias de resultados de aprendizaje y alcance de las demandas cognitivas. Un ejemplo posible de gradiente con estos tres niveles de logro del objetivo (alto, medio, bajo), con sus indicadores correspondientes, que permiten al profesor evaluar las capacidades consideradas, como se muestra en el esquema (figura 2.16).

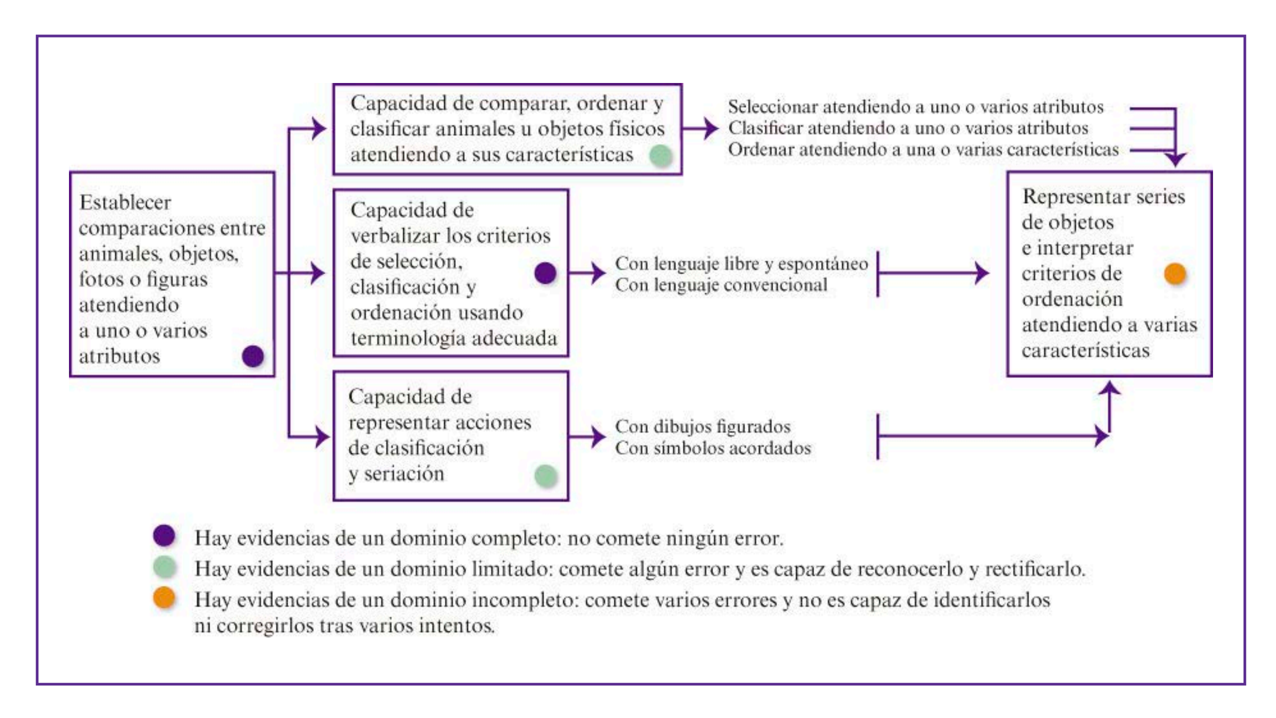


Figura 2.16.—Esquema con indicadores de evaluación.

7.2. Evaluación del programa formativo

Para una comprensión más completa de los resultados de la evaluación del aprendizaje, es necesario y conveniente llevar a cabo evaluaciones relativas al programa formativo, al proyecto de trabajo, a la metodología docente, a la planificación curricular, a la adecuación de los materiales, a la secuencia de tareas y al tiempo invertido. Un profesor que opte por una metodología de trabajo por proyectos deberá evaluar su trabajo docente con herramientas objetivas. El análisis didáctico ofrece respuestas consistentes a todas estas cuestiones. A continuación presentamos un modelo de rúbrica que agrupa preguntas relativas a las cinco dimensiones del ciclo integrado del análisis didáctico en educación matemática. La especificación del gradiente en cada una de las cuestiones que se proponen permite delimitar niveles de complejidad y dominio.

ACTIVIDAD 1: Evalúa en una escala de 1 a 3 (bajo, medio, alto) en qué medida las expectativas de aprendizaje que señalas en la actividad 2 del punto 1 (inicio del capítulo) se han cumplido.

ACTIVIDAD 2: Revisa las competencias de la guía docente de la asignatura que estás cursando relacionadas con este capítulo. Realiza un ejercicio de autocrítica con relación a tu aprendizaje, logros y grado de adquisición de dichas competencias.

Análisis conceptual	
• ¿Qué tópicos y contenidos se abordan en este proyecto con relación al curso y la etapa educativa?	1 2 3
• ¿En qué medida los contenidos se adaptan a la etapa cognitiva en que se encuentran los escolares?	1 2 3
• ¿Hay evidencias de investigación sobre caminos de aprendizaje en los contenidos matemáticos que van abordar en el proyecto?	1 2 3
• ¿Qué resultados de investigación hay disponibles?	1 2 3
Análisis de contenido	
• ¿Cómo representar y visualizar?	1 2 3
• ¿En cuántos contextos se puede aplicar?	1 2 3
• ¿De cuántas formas posibles se puede comunicar?, ¿amplía las formas de comunicación y apropiación del entorno?	1 2 3
• ¿Qué lenguaje es el más apropiado?	1 2 3
• ¿Cómo generalizar y abstraer una situación o caso particular?	1 2 3
• ¿Cómo se produce el aprendizaje del sentido matemático y su aplicación a diferentes contextos y situaciones de la vida real?	1 2 3
• ¿Se ha abordado un análisis de contenido de proyectos similares?, ¿qué recomendaciones ofrecen los libros de texto y proyectos curriculares de diferentes editoriales?	1 2 3
• ¿Qué prescribe la normativa vigente en cuanto a objetivos curriculares y finalidades formativas?	1 2 3

Análisis cognitivo	
• ¿Están preparados para iniciar esta trayectoria hipotética de aprendizaje?, ¿cómo se facilita?, ¿qué lo dificulta?	1 2 3
• ¿Las expectativas de enseñanza son realistas y los obstáculos y limitaciones son superables adaptando contenidos a las capacidades y posibilidades de cada estudiante y de cada momento de su ciclo madurativo?	1 2 3
• ¿Qué expectativas y niveles de exigencia plantean estas tareas?	1 2 3
• ¿Se analizan las ideas previas?	1 2 3
• ¿Favorece la reorganización del pensamiento y contribuye a alcanzar las competencias de alfabetización matemática deseables para la etapa?	1 2 3
Análisis de instrucción	
• ¿En qué condiciones y circunstancias se desarrolla el aprendizaje?, ¿qué metodología docente?, ¿qué secuencia?, ¿cuánto tiempo?	1 2 3
• ¿Qué materiales? ¿cuál es el material didáctico más óptimo para propiciar la construcción de significado matemático?	1 2 3
• ¿Es adecuada esta secuencia de tareas?	1 2 3
• ¿Admite el proyecto el trabajo multinivel en función de las necesidades de cada estudiante?	1 2 3
• ¿Atiende la necesidad de enseñarlas de una forma sistemática, organizada, divertida, estimulante y motivadora?	1 2 3
• ¿Cómo estimular la comunicación y la argumentación en el aula?	1 2 3
• ¿Qué situaciones favorecen y provocan una mayor interacción en el aula?	1 2 3
Análisis evaluativo	
• ¿Qué competencias se alcanzan?	1 2 3
• ¿Qué niveles de logro, qué deficiencias, qué capacidades, habilidades, hábitos, procedimientos, actitudes... se desarrollan?	1 2 3
• ¿Qué evidencias de dominio del sentido matemático de orden numérico, espacial, de la medida y estadístico?, ¿cómo se reconocen e identifican estos dominios?, ¿qué instrumentos de evaluación?	1 2 3
• ¿Qué fortalezas y debilidades tiene este proyecto?	1 2 3
• ¿Qué mejoras se pueden implementar al plan de trabajo?	1 2 3
• ¿Qué innovaciones pueden acometerse para futuras ediciones?	1 2 3

3 Lenguaje lógico-matemático

AURORA DEL RÍO
JUAN F. RUIZ

Ana (4 años): *Mamá, quiero más a mis juguetes que a ti.*
¡No!, te quiero a ti más que a mis juguetes.
Bueno, eso es que os quiero lo mismo.

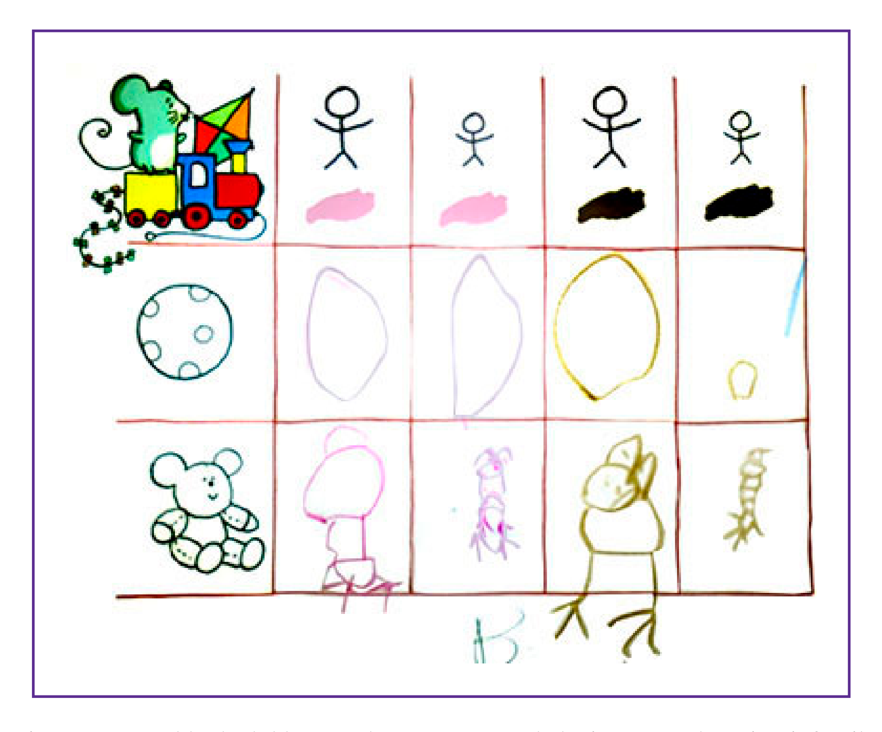


Figura 3.1.—Tabla de doble entrada en una tarea de lógica para educación infantil.

La imagen de la figura 3.1 pertenece a una tarea tomada de un libro de educación infantil. Dicha tarea consiste en dibujar en cada cuadro de la tabla un objeto (pelota, oso) de acuerdo con las cualidades (características o atributos) que se indican (tamaño, color). El escolar que la realice ha de identificar los dos objetos diferentes y elegir las cualidades que es necesario asignarles (grande o pequeño, azul o rojo) con el fin de rellenar todos los huecos de esta tabla de doble entrada.

La acción anterior, a realizar por el niño, corresponde a un proceso lógico. Como se observa, la tarea no parece de iniciación, ya que sería mucho más sencilla si únicamente hubiese un tipo de objetos y una sola cualidad. Por ejemplo, si se consideran los lápices de un estuche y se toma la cualidad sensorial «color rojo», la agrupación de todos los lápices rojos separándolos de los que no son rojos establece una organización mucho más sencilla. Dicha organización está basada en el cumplimiento y el no cumplimiento de una cualidad o atributo. Más formalmente, si se toma como enunciado «El lápiz es rojo», se puede realizar una separación entre los lápices que «sí» son rojos y los que «no» son rojos.

La acción de decidir si un determinado objeto hace que una frase sea verdadera o falsa, es decir, decidir el valor de verdad de un enunciado, está en la base de los procesos de agrupación. Al observar un lápiz rojo y enunciar «el lápiz es rojo», la respuesta será «verdadero». Sin embargo, al observar un lápiz de otro color y enunciar «el lápiz es rojo», la respuesta será «falso». La cualidad rojo permite agrupar todos aquellos lápices que ostenten dicho color.

Desde el punto de vista de la lógica, la veracidad o la falsedad son atributos posibles de las frases y se expresan diciendo que una frase es verdadera o falsa. Además, la decisión acerca de si una frase es verdadera o falsa es más sencilla cuando se considera un solo objeto y una sola cualidad que cuando la frase tiene varios objetos y/o varias cualidades. Expresar cualidades de objetos es tanto más complejo cuantos más objetos y más cualidades intervengan.

El objetivo de este capítulo es hacer una introducción a la lógica formal elemental y estudiar cómo expresar agrupaciones, clasificaciones y ordenaciones. Ejemplificaremos esta introducción a la lógica formal mediante el lenguaje y representaciones verbales, tabulares y gráficas.

1. LENGUAJE Y LÓGICA

El lenguaje que se habla normalmente en una comunidad es fruto de su herencia histórica y cultural. El lenguaje se va perfeccionando con el tiempo, evoluciona y se transmite a los individuos desde los primeros años de su vida; como consecuencia, todas las personas que comparten determinadas características sociales y culturales emplean un mismo lenguaje, que sirve de soporte para la comunicación, siendo un medio de intercambio social. Se conoce como lenguaje natural.

El lenguaje natural permite expresar la mayoría de nuestras experiencias y reflexionar sobre ellas. Sin embargo, en ocasiones es necesario crear nuevos lenguajes derivados del natural con fines específicos. En la actualidad, las redes sociales y las aplicaciones de mensajería instantánea son un ejemplo de estos nuevos lenguajes: el lenguaje de los emoticonos, de las palabras sin vocales... En otros ámbitos, como el científico, también resulta necesario establecer tantas modificaciones sobre el lenguaje cotidiano que lo convierten en un lenguaje propio. Estos lenguajes derivados se denominan «lenguajes artificiales».

Entre los lenguajes artificiales, los lenguajes formales son los que están sometidos a unas normas fijas de formación y de significado. Los lenguajes formales están muy relacionados con las matemáticas, la lógica y las ciencias de la computación. Permiten desarrollar deducciones sin ambigüedad que no serían posibles mediante el lenguaje natural y sus reglas. Para evitar las ambigüedades y contradicciones, los lenguajes formales se desarrollan con unas normas basadas en la simplicidad de sus elementos básicos, en un conjunto reducido de reglas sintácticas, en una colección de propiedades y en unas reglas lógicas que permiten deducir elementos complejos a partir de otros más sencillos.

Un ejemplo de lenguaje artificial es el esperanto, lengua creada en el siglo XIX con la esperanza de que se convirtiera en la lengua auxiliar internacional. Es la lengua construida más hablada del mundo. Un ejemplo de lenguaje formal es cualquier lenguaje de programación informática.

La lógica es una ciencia formal que estudia los principios de la demostración e inferencia válida para obtener conclusiones verdaderas a partir de premisas. La lógica trabaja con enunciados y razonamientos, y determina cuándo son verdaderos o falsos.

Se distinguen, entre otras, la lógica natural y la formal. Al igual que pasa con los lenguajes artificiales que surgen de los lenguajes naturales, las reglas lógicas formales son parecidas a las reglas de la lógica natural, pero la natural es menos precisa aunque más rica. Mientras que la lógica formal analiza la estructura de los razonamientos, la lógica natural se basa en el significado de las frases que se están analizando.

1.1. Distinguir y expresar cualidades

Las expresiones cualidad, característica o atributo de los objetos denotan aquello que se puede

percibir por los sentidos; de ahí que se las conozca como cualidades sensoriales. En la tabla 3.1 se recogen cualidades de los objetos, propias de cada uno de los sentidos por los que se perciben, los adjetivos asociados a ellas y las variantes que presentan dichos objetivos.

TABLA 3.1

Cualidades sensoriales

Sentido	Cualidad	Adjetivos/Variantes
Tacto	Dureza Temperatura Textura	Duro, blando, espeso... Caliente, frío, abrasador, fresco... Rugoso, liso, suave...
Olfato	Mal olor Buen olor	Desagradable, apestoso... Agradable, floral...
Sabor	Dulce Salado Amargo	Azucarado... Soso...
Oído	Duración Intensidad Frecuencia	Continuo, intermitente... Fuerte, suave... Agudo, grave...
Vista	Color	Rojo, azul...

Verbalmente, la descripción de una cualidad requiere el uso del lenguaje cotidiano, que, normalmente, se expresa con la estructura sintáctica:

Sujeto + verbo + cualidad

Ejemplos de descripciones de cualidades de objetos son: «el café es amargo», «un cuadrado tiene cuatro lados», «mi coche tiene cuatro ruedas», «yo soy un ser humano».

Cada cualidad permite seleccionar o resaltar objetos, juntarlos y separarlos atendiendo a si poseen o no dicha cualidad. Por ejemplo, la edad permite seleccionar a los escolares y agruparlos por clases en los colegios.

Una forma de indicar en papel, pizarra u otra superficie la idea de consideración simultánea cuando los objetos cumplen con alguna cualidad es mediante marcas, colores, rodeándolos, separándolos, poniéndolos juntos... Por ejemplo, para seleccionar objetos de la figura 3.2 según la cualidad «tener cuatro lados» se han rodeado con un círculo aquellos que la cumplen.

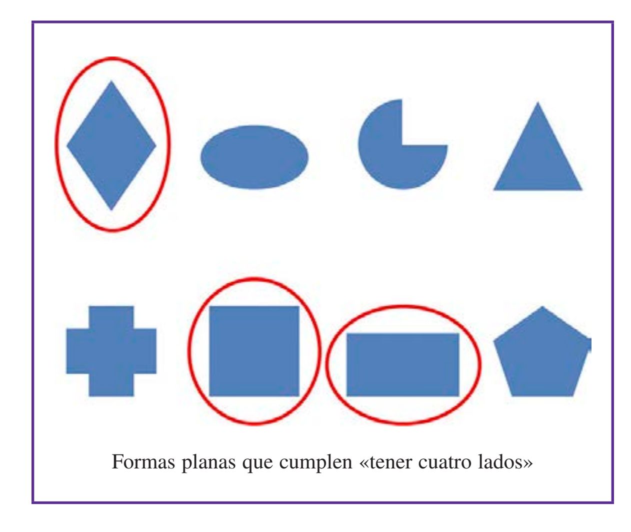
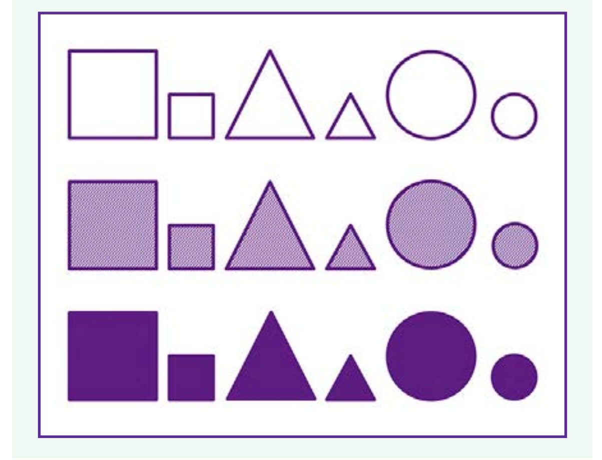


Figura 3.2.—Formas planas y selección de las que tienen cuatro lados.

ACTIVIDAD 1: Dada la siguiente colección de objetos, elige una cualidad y agrúpalos usando algún tipo de marca según la cualidad elegida.



1.2. Tipos de enunciados. Proposiciones

En el lenguaje formal y en el estudio de la lógica, un *enunciado* es el mínimo segmento lingüístico que tiene sentido completo por sí mismo. Ejemplos de enunciados son:

- El cuadrado tiene cuatro lados.
- Esta fiesta es muy divertida.
- Esta fiesta es muy divertida y la música es muy buena.
- ¿Qué hora es?

Dentro de los enunciados, la unidad básica de información para la lógica formal es la *proposición,* que es una expresión con sentido en un lenguaje (un enunciado) que proporciona información al afirmar o negar algo. Toda proposición se caracteriza por el hecho de ser verdadera (V) o falsa (F). Es un enunciado que admite la posibilidad de ser verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez. Ejemplos de proposiciones son:

- Madrid es la capital de España.
- El 2 es un número par y primo.
- Miguel de Cervantes escribió *El Lazarillo de Tormes.*

Ejemplos de enunciados que no son proposiciones son las paradojas, pues no se puede determinar si sus enunciados son verdaderos o falsos. Dos ejemplos de paradojas son:

- Estoy mintiendo.
- La palabra secreta es «secreta».

ACTIVIDAD 2: Indica, de las siguientes frases, cuáles son proposiciones.

a) (3 – 1)(3 + 1) = 92 – 1.
b) 1 + 1 = 21.
c) La idílica puesta de sol.
d) ¿Qué hora es?
e) Hoy es martes.
f) Un cuadrado es un rombo y un rectángulo.
g) El número 4.

ACTIVIDAD 3: Escribe una proposición y un enunciado que no sea proposición.

Dentro de las proposiciones, se destacan en este capítulo las proposiciones atómicas (o simples) y las moleculares (o compuestas). Atómica es toda proposición de la que se puede decir que es verdadera o falsa usando los sentidos o el conocimiento que se posee sobre aquello que describe. Por ejemplo, «la basura huele mal», «el número 2 es par».

En general, una proposición atómica se expresa verbalmente de la forma:

Objeto + ser/tener/otros verbos + cualidad

Para trabajar con proposiciones atómicas es importante asegurarse de que el objeto sea único y de que haya sólo una cualidad.

Una proposición se dice molecular cuando está formada por varias proposiciones atómicas. Por ejemplo, la proposición «el número 2 es par y primo» es una proposición molecular constituida por dos atómicas: «el número 2 es par» y «el número 2 es primo».

1.3. Veracidad de una proposición

Decidir la veracidad de una proposición es decir si es verdadera o falsa. Ejemplos:

- La facultad tiene tres edificios. La proposición es verdadera si la facultad a la que se hace referencia tiene tres edificios y es falsa si no los tiene.
- Miguel de Cervantes escribió *El Quijote* y *El Lazarillo de Tormes.* La proposición es falsa porque Miguel de Cervantes no escribió *El Lazarillo de Tormes.*

A pesar de que una proposición siempre es verdadera o falsa, puede suceder que en un momento determinado no sea posible decidir su veracidad. Por ejemplo, la proposición «la composición química de la atmósfera tiene un 78% de nitrógeno» es verdadera. Sin embargo, muchas personas lo desco-

nocen, por lo que no podrían decidir sobre la veracidad de la proposición.

En ocasiones, es útil representar las proposiciones por letras. De esta forma, no es necesario repetir la proposición cada vez que haya que usarla. Para hacerlo se suelen utilizar las letras «p», «q»... Ejemplo:

- p: El chopo es de hoja caduca.

Para simplificar aún más la notación, se usa una representación tabular, una tabla de doble entrada llamada «tabla lógica». Ejemplo, «El chopo es de hoja caduca», que es una proposición verdadera, se puede denotar como se indica en la tabla 3.2.

TABLA 3.2

Tabla lógica para una proposición

El chopo es de hoja caduca	p
Valor de verdad	V

1.4. Negación de una proposición

Para construir la negación de una proposición se usa la partícula «no» o una expresión equivalente y se denota poniendo NO delante de la proposición o, en su defecto, algún símbolo equivalente: ¬p se lee «no p» y es la negación de la proposición p. Ejemplos:

- p: La clase está formada por 25 escolares.
- ¬p: La clase no está formada por 25 escolares.
- q: $2 + 2 = 4$. Dos más dos es igual a cuatro.
- ¬q: $2 + 2 \neq 4$. Dos más dos no es igual a cuatro.

ACTIVIDAD 4: Niega las proposiciones anteriores sin usar la palabra «no».

El valor de verdad de la negación de una proposición es el opuesto al de la proposición. Ejemplos:

- p: 2 es un número par (V).
- ¬p: 2 no es número par (F).
- q: Miguel de Cervantes escribió *El Lazarillo de Tormes* (F).
- ¬q: Miguel de Cervantes no escribió *El Lazarillo de Tormes* (V).

La tabla de verdad de la negación es como se recoge en la tabla 3.3.

TABLA 3.3

Tabla de verdad de la negación

Proposición	p	¬p
Valor de verdad	V	F
	F	V

De las dos filas, en cada caso sólo se cumple una, la cual habrá que decidir.

La negación de la negación (doble negación) de una proposición devuelve la proposición a su versión original o a una equivalente (con el mismo valor de verdad).

ACTIVIDAD 5: Escribe la tabla de verdad de la doble negación.

ACTIVIDAD 6: Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones.

a) El coche es rojo.
b) La Luna es un satélite de la Tierra.
c) Un cuadrado no tiene vértices.
d) La televisión está apagada.

ACTIVIDAD 7: Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. En caso de que sea falsa, escribe su negación:

a) Hoy llueve.
b) Un cuadrado es un poliedro.
c) Soy un hombre.
d) El 2 es un número impar.

2. CONECTORES LÓGICOS

Conectores lógicos son aquellas palabras o términos que hacen el papel de enlace o conexión entre proposiciones ya establecidas para obtener una nueva proposición. Los casos más sencillos de uso corresponden a un único objeto del que se quieren describir dos o más cualidades. Las proposiciones obtenidas usando conectores son proposiciones moleculares. Ejemplos:

- Venus es un planeta y gira alrededor del Sol.
- Si te llamaras Jaime, entonces te llamarías como mi hermano.
- El colegio tiene director o directora.
- No llueve los miércoles.

La lógica formal considera cuatro conectores:

- La conjunción «y» ($\wedge$).
- La disyunción lógica (inclusiva) «o» ($\vee$).
- La implicación «si... entonces» ($\Rightarrow$).
- La doble implicación o bicondicional «si y sólo si» ($\Leftrightarrow$).

Cuando se forma una nueva proposición a partir de la composición de dos proposiciones atómicas (p y q) mediante algún conector, una estrategia útil para decidir sobre su veracidad consiste en separar las proposiciones atómicas y decidir por separado cada una de ellas. En estos casos, pueden suceder cuatro cosas:

- Que p sea verdadera y q sea verdadera.
- Que p sea verdadera y q sea falsa.
- Que p sea falsa y q sea verdadera.
- Que p sea falsa y q sea falsa.

2.1. Conjunción ($\wedge$)

La conjunción lógica de dos proposiciones es otra proposición formada por la composición de las de partida mediante la palabra «y» (símbolo «$\wedge$»).

La conjunción de dos proposiciones es verdadera sólo cuando las dos proposiciones iniciales son verdaderas.

La tabla de verdad para la conjunción, que recoge todas las posibilidades, es la tabla 3.4.

TABLA 3.4

Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Para decidir la veracidad de una proposición con un conector es necesario: primero, separar la proposición en dos proposiciones atómicas y, segundo, decidir separadamente cada una de estas proposiciones atómicas. Finalmente, se decide la proposición observando el criterio de decisión del conector o bien la tabla de verdad. Ejemplos:

- «Miguel de Cervantes escribió *El Quijote* y *El Lazarillo de Tormes.*» Si dividimos la proposición en las dos atómicas que la constituyen, p: «Miguel de Cervantes escribió *El Quijote*» y q: «Miguel de Cervantes escribió *El Lazarillo de Tormes*», vemos que p es verdadera y q es falsa. De los valores de verdad de cada una de las proposiciones que la componen, se deduce que $p \wedge q$ es falsa.
- «El 2 es un número par y primo.» Aquí, p: «el 2 es un número par» es verdadera y q: «el 2 es un número primo» es verdadera. Se tiene que la proposición es verdadera, ya que p y q lo son.

Otro uso de la tabla es facilitar la construcción de proposiciones verdaderas o falsas a partir de dos atómicas. Por ejemplo, dadas las proposiciones:

- la Luna es un satélite de la Tierra, que es verdadera,

- la Luna tiene forma cilíndrica, que es falsa, se puede prever que la conjunción de ambas es falsa.

Actividad 1: Analiza las proposiciones atómicas de «el 2 es un número par y no es primo» y señala cuál es su valor de verdad.

Actividad 2: Decide si la proposición «el 1 de enero es el primer día del año y se celebra el carnaval» es verdadera o falsa.

Actividad 3: Escribe dos proposiciones atómicas cuyo valor de verdad conozcas. Construye su conjunción y di si es verdadera o falsa.

2.2. Disyunción lógica (∨)

La disyunción de proposiciones es la proposición formada por la unión de las de partida mediante la palabra «o» (símbolo «∨»).

La disyunción de dos proposiciones es verdadera si, al menos, una de las dos proposiciones que la forman lo es. De otra forma, la disyunción sólo es falsa si todas las proposiciones iniciales lo son.

TABLA 3.5

Tabla de verdad de la disyunción lógica

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si la unión de dos proposiciones se realiza mediante «o», las normas de la lógica son un poco diferentes de las reglas de la lógica natural. Por ejemplo: la proposición «el 2 es un número par o la suma de 2 + 2 es 4» se entendería, desde la lógica natural, como que el número 2 es par, o bien la suma de 2 + 2 es 4, pero no ambas a la vez.

De la misma forma, la proposición «las pizarras de la facultad son digitales o de tiza» se entiende habitualmente como o bien que las pizarras de la facultad son digitales o bien que las pizarras de la facultad son de tiza.

Sin embargo, para la lógica formal, la disyunción es cierta en tres casos: cuando al menos una de las dos proposiciones atómicas que la conforma es cierta y cuando las dos proposiciones son ciertas. Ejemplo:

- El 1 de enero es el primer día del año o se celebra el carnaval.

Se puede separar en las proposiciones atómicas: el 1 de enero es el primer día del año, que es verdadera, y el 1 de enero se celebra el carnaval, que es falsa.

En este caso, la disyunción es verdadera puesto que (al menos) una de las dos proposiciones que la componen lo es.

Actividad 4: Se consideran las proposiciones atómicas y sus valores de verdad:

- p: Paula tiene 10 años, cuyo valor de verdad es falso.
- q: Paula tiene el pelo negro, cuyo valor de verdad es verdadero.

Construye la disyunción y decide su valor de verdad.

Actividad 5: Escribe dos proposiciones atómicas cuyo valor de verdad conozcas. Construye su disyunción y di si es verdadera o falsa.

2.3. Proposiciones equivalentes

Dos proposiciones son iguales cuando son iguales tanto por su oración gramatical como por su significado. Por ejemplo, «hoy es lunes» y «mañana es martes» tienen el mismo significado pero no son

iguales porque desde el punto de vista gramatical son diferentes.

La lógica está interesada por el valor de verdad de las proposiciones, lo que aporta una forma de relacionar dos proposiciones mediante su valor de verdad. Se dice que dos proposiciones son *equivalentes* si tienen el mismo valor de verdad. Para denotar proposiciones equivalentes se usa el símbolo «≡».

La noción de equivalencia de proposiciones permite expresar proposiciones de formas diferentes. Por ejemplo, $p \vee q \equiv q \vee p$.

Para expresar la negación de conjunciones y disyunciones es muy útil la noción de equivalencia. En el epígrafe 1.4, dedicado a la negación, se indica que una proposición y su negación tienen valores de verdad contrarios. Por este motivo, construir la negación de una proposición con conectivos nunca equivale a construir la conjunción de las negaciones, sino que requiere seguir unas normas lógicas basadas en la equivalencia de proposiciones. La tabla 3.6 resume las equivalencias lógicas usadas para construir la negación:

TABLA 3.6

Tabla de verdad de la negación de conjunciones y disyunciones

Tipo de proposición	**Negación**
Negación de la conjunción, $p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$
Negación de la disyunción, $p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
Conjunción de negaciones, $\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$
Disyunción de negaciones, $\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$

Por ejemplo, la proposición «Jaime es alto y tiene los ojos azules» es la conjunción de las dos proposiciones atómicas p: Jaime es alto y q: Jaime tiene los ojos azules. Su negación se puede escribir de dos formas:

- $\neg(p \wedge q)$: No (Jaime es alto y tiene los ojos azules).
- $\neg p \vee \neg q$: Jaime no es alto o no tiene los ojos azules.

ACTIVIDAD 6: Se considera que la proposición «María tiene 20 años» es verdadera y «Juan tiene 20 años» es falsa. Decide la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones:

a) María y Juan tienen 20 años.
b) María o Juan tienen 20 años.
c) María tiene 20 años y Juan no tiene 20 años.
d) María y Juan no tienen 20 años.

2.4. Implicación «si... entonces...» (⇒)

Dadas dos proposiciones p y q, el condicional o implicación lógica es la unión de ambas mediante el símbolo «⇒». El condicional se lee «si p, entonces q».

La veracidad de la implicación está dada mediante su tabla de verdad (tabla 3.7).

TABLA 3.7

Tabla de verdad de la implicación

p	**q**	**p ⇒ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos de implicaciones son: «si la figura tiene cuatro lados, entonces es un cuadrilátero», o también, «si hoy es lunes, entonces mañana es martes».

Ejemplo: se consideran dos proposiciones atómicas:

- p: Andalucía está situada al sur de España (verdadera).
- q: Andalucía es una región de España (verdadera).

La implicación p ⇒ q, «si Andalucía está situada al sur de España, entonces Andalucía es una región de España», es verdadera pues está formada por dos proposiciones verdaderas.

Actividad 7: Considerando que la proposición p: «hoy es sábado» es verdadera y q: «hoy voy al cine» es falsa, construye la implicación p ⇒ q y decide su valor de verdad.

Actividad 8: Escribe dos proposiciones atómicas cuyo valor de verdad conozcas. Construye su implicación con cuidado de que la frase tenga sentido. Di si es verdadera o falsa.

2.5. Bicondicional «si y sólo si» (⇔)

El bicondicional es un conector formado conjuntamente por las implicaciones p ⇒ q y q ⇒ p. Se representa p ⇔ q y se lee «p si y sólo si q». La proposición que se obtiene será verdadera sólo cuando ambas sean verdaderas o ambas falsas.

TABLA 3.8

Tabla de verdad del bicondicional

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo: la proposición «el 4 es un número impar si y sólo si es divisible entre 3» está formada por «el 4 es un número impar» (que es falsa) y «el 4 es divisible entre 3» (que también es falsa); luego la proposición es verdadera (observar la última fila de la tabla).

Ejemplos de bicondicionales falsos serían:

- La Luna es un satélite de la Tierra si y sólo si tiene forma cilíndrica.
- El 1 de enero es el primer día del año si y sólo si se celebra el carnaval.

Actividad 9: Determina si es verdadero o falso el siguiente enunciado: «un triángulo es isósceles si y sólo si tiene sus tres ángulos iguales».

Actividad 10: Escribe dos proposiciones atómicas cuyo valor de verdad conozcas. Construye su bicondicional (cuida que la frase tenga sentido). Decide si es verdadera o falsa la proposición que obtienes.

3. CUANTIFICADORES

Los cuantificadores lógicos, dentro de la lógica de predicados, son indicadores de cantidad que denotan la singularidad o pluralidad de objetos del conjunto a los que se refiere la proposición. Los cuantificadores son tres: todos, algunos y ninguno. Asociadas a estos tres hay muchas expresiones (tabla 3.9). Ejemplos de proposiciones que contienen cuantificadores:

- Algunos coches son rojos.
- Todos los días llueve.
- Nadie sabe bailar.

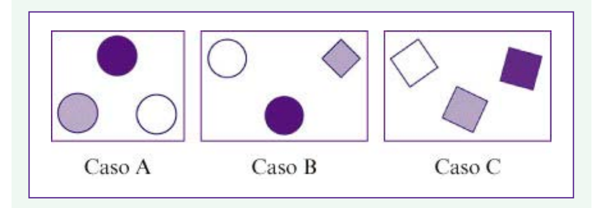
En estos casos, el (los) sujeto está indeterminado y suele venir acompañado de un cuantificador. Los enunciados no se refieren a un solo sujeto, sino a un conjunto de objetos. Por ejemplo: «algún niño es travieso» tiene el mismo valor lógico que «al menos uno de los niños es travieso».

TABLA 3.9

Expresiones asociadas a los cuantificadores

Todos	Todos y cada uno, la totalidad, siempre...
Algunos	Existe alguno, algún, al menos uno, algunas veces, a veces...
Ninguno	Nadie, nunca...

ACTIVIDAD 1: De acuerdo con cada uno de los casos de la figura, decide el valor de verdad de las proposiciones. Realiza una tabla en la que queden organizadas todas las respuestas.



a) Todas las figuras son redondas.
b) No todas las figuras son redondas.
c) Todas son cuadradas.
d) No todas son cuadradas.
e) Algunas figuras son negras.
f) Algunas figuras no son grises.

La negación de las proposiciones con cuantificadores requiere unas normas lógicas estrictas. Se puede confundir la negación de «en Alaska siempre hace frío» con «en Alaska nunca hace frío». Pero no es correcto. La negación correcta se puede expresar de dos proposiciones equivalentes:

- Mediante la partícula «no»: en Alaska no siempre hace frío.
- Mediante el uso de otro cuantificador: en Alaska, a veces, no hace frío.

La siguiente tabla resume los cuantificadores que se usan en las negaciones.

TABLA 3.10

Expresiones asociadas a la negación de cuantificadores

Cuantificador	**Negación**
Todos	No todos/Algunos no
Algunos	Ninguno
Algunos no	Todos
Ninguno	Algunos

ACTIVIDAD 2: Escribe las negaciones de las siguientes proposiciones.

a) Todos los días llueve.
b) El profesor de matemáticas a veces se equivoca.
c) Ningún triángulo es un poliedro.
d) Algún día iré a China.

4. RAZONAMIENTO

Se denomina «razonamiento» al hecho de pensar, ordenando ideas y conceptos para llegar a una conclusión o resolver un problema. Son considerados varios tipos de razonamiento. A continuación recogemos algunos.

Razonamiento *lógico:* es el proceso por el cual se infiere una conclusión a partir de unas premisas siguiendo las reglas de la lógica. Una colección de proposiciones tales que una de ellas es consecuencia lógica de las demás se denomina inferencia; las proposiciones iniciales, premisas, y la proposición que se desea decidir, conclusión. Cualquier colección de proposiciones puede dar lugar a una inferencia. Pero no todas las inferencias son correctas ni válidas.

Los pasos que permiten pasar de las proposiciones iniciales a la conclusión están determinados por las reglas lógicas. De premisas verdaderas se deducen, si se siguen las reglas correctamente, conclusiones verdaderas.

En los procesos de razonamiento lógico se suelen utilizar tautologías. La tautología, en lógica proposicional, es una proposición verdadera independientemente del valor de verdad que tomen las proposiciones atómicas. Se suelen considerar repetición de un mismo pensamiento expresado de distintas formas equivalentes, por ejemplo: «yo soy yo, y nadie más». La disyunción de una proposición y su negación también son tautologías; por ejemplo, «hace calor o no hace calor» «es de noche o no es de noche» son proposiciones que siempre son verdaderas, independientemente del valor de verdad que tomen las proposiciones atómicas.

Razonamiento *intuitivo:* es aquel que se realiza mediante la intervención de un presentimiento. Es

frecuente cuando no se dispone de toda la información necesaria para tomar una decisión y ésta se toma basándose en la apariencia o en lo que nos da la impresión de que es correcto. Un ejemplo de razonamiento intuitivo es pensar que un piso en una zona acomodada de una ciudad en la que suele hacer frío en invierno tendrá calefacción.

El razonamiento *inductivo:* requiere la búsqueda de un patrón y la observación de regularidades. Se parte de ejemplos específicos y se induce una conclusión general. Por ejemplo, si voy a alquilar un piso y conozco que los pisos de algunos vecinos tienen calefacción, induzco que el piso que voy a alquilar también la tiene.

Razonamiento *deductivo:* se obtiene una conclusión a partir de información empleando reglas de la lógica. Siguiendo con el ejemplo anterior, si se sabe que todas las viviendas del bloque donde voy a alquilar tienen calefacción, deduzco que el piso que alquilo también la tiene.

Razonamiento *abductivo:* consiste en explicar las premisas de un razonamiento a partir de la conclusión. Si sé que en el bloque todos mis vecinos tienen calefacción y sé que Pilar tiene calefacción en su piso, una premisa es que Pilar es mi vecina.

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Existen problemas cuya solución no pasa por realizar un algoritmo aritmético sino que requiere aplicar las reglas de la lógica. Proponemos algunos problemas lógicos para que los resuelvas.

ACTIVIDAD 1: Marina, Enrique, Jaime y Paula son artistas que le ponen voz a películas de dibujos animados.



Cada uno de ellos le ha puesto voz a un animal distinto: pato, pez, ave y ratón, aunque no se corresponde con el orden de los nombres. A veces entre ellos se nombran por los personajes que interpretan. Deduce quién interpreta a cada animal sabiendo que:

- Jaime juega a las cocinas con pez y va a la piscina con ave.
- Paula ha ido a la playa con pez pero va al colegio con ratón.
- Pato, pez y Marina hacen danza.
- Pato juega a veces con Jaime.

ACTIVIDAD 2: Claudia y Martina son amantes del cine y ven películas con frecuencia. Claudia va al cine los miércoles, jueves y viernes y no va el resto de los días de la semana. Martina va al cine los domingos, lunes y martes pero no va el resto de la semana. Si las dos dicen la frase: «mañana no voy al cine», ¿a qué día de la semana están haciendo referencia?

6. REPRESENTACIÓN DE LAS RELACIONES LÓGICAS

Una manera de representar un número finito de objetos, considerando los que cumplen una proposición atómica y su negación, es mediante el uso de diagramas de Venn para representar conjuntos (colecciones de objetos), en los que se separa a los objetos que cumplen la cualidad de los que no la cumplen. Por ejemplo, la proposición «los días de la semana cuyo nombre termina en s» y su negación, «los días de la semana cuyo nombre no termina en s», se pueden representar usando los diagramas como se hace en la figura 3.3.

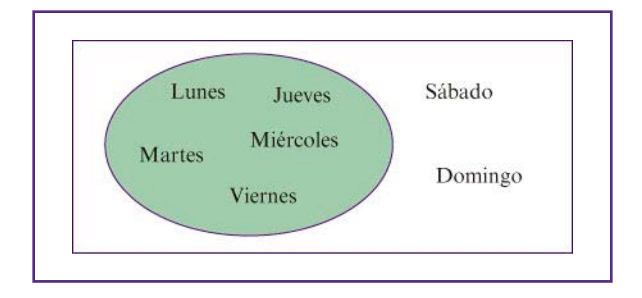


Figura 3.3.—Representación, mediante diagrama de Venn, de palabras de días de la semana que cumplen y no cumplen la proposición «termina en s».

Los diagramas de Venn ofrecen la posibilidad de representar conjuntos cuyos elementos hacen verdadera una proposición o más de una. Ejemplo de esto son los tres casos que se presentan en la figura 3.4:

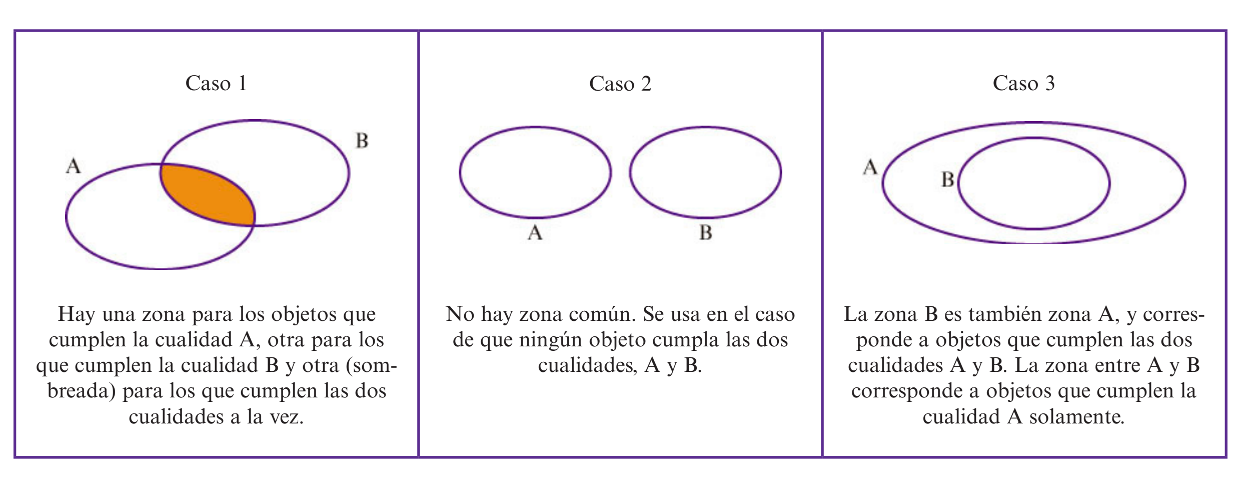


Figura 3.4.—Tres casos de representar mediante diagramas de Venn.

Actividad 1: Indica razonadamente a qué caso corresponden los siguientes enunciados, señalando con cuál representación de las indicadas en la figura 3.4 se identifican las cualidades:

a) Ser andaluz y ser marciano.
b) Ser andaluz y ser hombre.
c) Ser andaluz y ser español.
d) Ser mujer y ser europea.
e) Todos los españoles son europeos.
f) Algunos españoles hablan gallego.
g) Ningún estudiante de esta clase reside en Asia.
h) Todos los estudiantes de esta clase son millonarios.
i) Algunos días de la semana terminan en s.

Actividad 2: Resuelve el problema siguiente utilizando diagramas de Venn.
En una selección de 45 alumnos, todos los cuales practican por lo menos un deporte, se conoce que:

a) Veinticuatro juegan al tenis, de los cuales 12 sólo juegan al tenis.
b) Veinticinco juegan al pádel, de los cuales 10 sólo juegan al pádel.
c) Diecinueve juegan al baloncesto, de los cuales 5 sólo juegan al baloncesto.
d) Cinco juegan al tenis, al pádel y al baloncesto.
e) Nueve juegan al tenis y al pádel.

Indaga para conocer:

a) ¿Cuántos alumnos juegan al pádel y al baloncesto?
b) ¿Cuántos alumnos juegan al tenis y no al pádel?
c) ¿Cuántos juegan al baloncesto y no al pádel?

7. RELACIONES DE CLASIFICACIÓN Y ORDEN

La clasificación y la ordenación están en la base de la formación de los conceptos construidos por el hombre, son la esencia de la labor descriptiva de los objetos y tienen un marcado carácter organizativo.

7.1. Clasificación

La clasificación, desde un punto de vista general, es la organización de un conjunto dado en

subconjuntos que cumplen algún criterio. Esta organización se puede realizar de varias formas, atendiendo al número de criterios que se utilizan o a las cualidades de los subconjuntos que se obtienen. Las clasificaciones más sencillas son las *dicotómicas,* las cuales tienen una relación directa con las proposiciones atómicas, de modo que se crean dos partes o clases en el conjunto de partida: la formada por los objetos que cumplen una proposición atómica y la que recoge los objetos que cumplen su negación.

ACTIVIDAD 1: Considera el conjunto de las cadenas de televisión: La Uno, La 2, Antena 3, Cuatro, Telecinco y La Sexta. Enuncia una proposición atómica y su negación y representa la partición usando diagramas de Venn.

El término «clasificación» y el verbo «clasificar» tienen en el lenguaje cotidiano algunos aspectos diferentes a la noción matemática. Por ejemplo, la clasificación de una competición deportiva no corresponde con la idea de clasificación que estamos presentando, pues no divide al conjunto en partes, sino que es una ordenación. Este hecho obliga a cuidar el vocabulario cuando se trabajan estos conceptos en el aula.

Las clasificaciones matemáticas se fundamentan en la idea de *relación de equivalencia,* según la cual todos los elementos de un mismo subconjunto o clase se pueden considerar equivalentes. Desde un punto de vista formal, una relación de equivalencia entre los objetos de un conjunto cumple las tres propiedades siguientes:

- Reflexiva: todo objeto está relacionado consigo mismo.
- Simétrica: si un objeto está relacionado con otro, éste a su vez está relacionado con el primero.
- Transitiva: si un objeto está relacionado con un segundo, y el segundo con un tercero, entonces el primero está relacionado con el tercero.

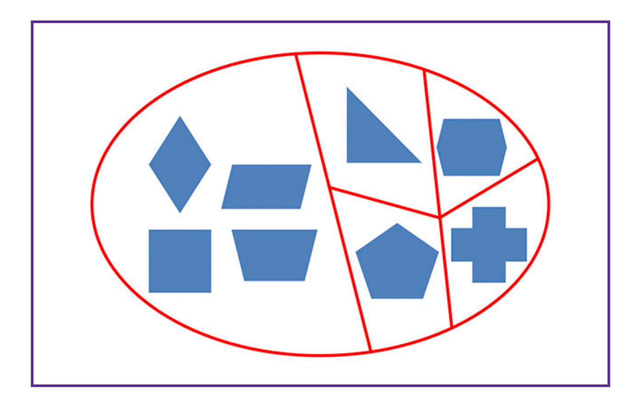


Figura 3.5.—Clasificación de un conjunto de polígonos considerando el número de lados.

En estos casos, los subconjuntos obtenidos por la clasificación tienen entidad propia de conjunto y pasa a denominarse clases de equivalencia o, simplemente, clases. La representación de una clasificación puede hacerse con un diagrama de Venn, como se muestra en la figura 3.5, donde se considera la relación establecida por la proposición «tener igual número de lados». En dicha clasificación se tiene:

- El triángulo forma la clase de los polígonos que tienen tres lados.
- El rombo, el cuadrado, el romboide y el trapecio forman la clase de los objetos de cuatro lados.
- El pentágono, la clase de los que tienen cinco lados.
- El hexágono, la clase de los que tienen seis lados.
- La cruz, la clase de los que tienen 12 lados.

La propiedad reflexiva asegura que todo objeto se relaciona consigo mismo (por ejemplo, el rombo tiene cuatro lados en cualquier posición que se presente).

La propiedad simétrica garantiza que si un objeto tiene el mismo número da lados que otro, éste tiene el mismo número de lados que el primero (por ejemplo, si el rombo tiene el mismo número de lados que el cuadrado, entonces el cuadrado tiene el mismo número de lados que el rombo).

La propiedad transitiva avala que si un objeto tiene igual número de lados que otro, y éste, a su vez, tiene el mismo número de lados que un tercero, el primer objeto y el tercero tienen el mismo número de lados (por ejemplo, si el rombo tiene el mismo número de lados que el cuadrado y el cuadrado tiene el mismo número de lados que el trapecio, entonces el rombo tiene el mismo número de lados que el trapecio).

ACTIVIDAD 2: Describe el criterio de clasificación para los meses del año que se han organizado como sigue:

- {Enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre}
- {Abril, junio, septiembre, noviembre}
- {Febrero}

ACTIVIDAD 3: El dominó es un juego tradicional que tiene 28 piezas. Busca una cualidad que permita clasificar las piezas y realiza la clasificación.

Las clasificaciones proporcionadas por una relación de equivalencia presentan las siguientes características:

- Se conoce (o determina) el conjunto sobre el que se va a realizar (conjunto inicial).
- La clasificación separa dicho conjunto inicial en partes. Cada una de estas partes está formada por al menos un elemento del conjunto inicial, es decir, cada una de las partes es un subconjunto del conjunto inicial. A cada una de estas partes o subconjunto se le llama clase.
- Los subconjuntos o clases en los que se divide el conjunto original no tienen elementos en común.
- La unión de todas las clases coincide con el conjunto inicial.

7.2. Orden

Cuando la cualidad (o atributo) permite organizar los objetos mediante la posición que ocupan unos con respecto a otros, se establecen las *relaciones de orden*. Por ejemplo, la edad, la altura, el momento de llegada en una competición y otros atributos que se pueden cuantificar. También se pueden ordenar conjuntos de objetos atendiendo a atributos de carácter no cuantitativo, sino cualitativo, como al hacer la lista de tus comidas por orden de preferencia.

Las relaciones de orden cumplen las propiedades:

- Reflexiva. Todo objeto es mayor o igual que sí mismo.
- Antisimétrica. Si un objeto es mayor o igual que otro, y este segundo es, a su vez, mayor o igual que el primero, entonces ambos objetos son iguales.
- Transitiva. Si un objeto es mayor o igual que otro y éste a su vez es mayor o igual que un tercero, entonces el primero es mayor o igual que el tercero.

Considerando, por ejemplo, el criterio «edad» y las personas Juan, María y Pedro, la propiedad reflexiva asegura que Juan tiene la misma edad que Juan.

La antisimétrica avala que si Juan tiene más edad que María y María tiene más edad que Juan, entonces María y Juan tienen la misma edad.

La transitiva garantiza que si Juan tiene más edad que María y María a su vez tiene más edad que Pedro, entonces Juan tiene más edad que Pedro.

La forma de representar el orden es diferente a la de representar la de clasificación. En matemáticas se usan los símbolos menor que (<) y mayor que (>) para ordenar y se suele usar una secuencia lineal para ordenar objetos. Por ejemplo, los números naturales se suelen representar alineados y separados por los símbolos adecuados:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

Figura 3.6.—Representación de la relación de orden de números naturales.

Hay ordenaciones que no permiten que los objetos de un conjunto puedan ordenarse linealmente en su totalidad; su representación, entonces, se suele hacer en forma de árbol o retículo. Por ejemplo, si ordenamos los números pares del 1 al 20 por la relación de divisibilidad, el 2 sería el primero (pues los divide a todos), pero el resto de números no admiten una colocación lineal. Se requiere un diagrama como el de la figura 3.7.

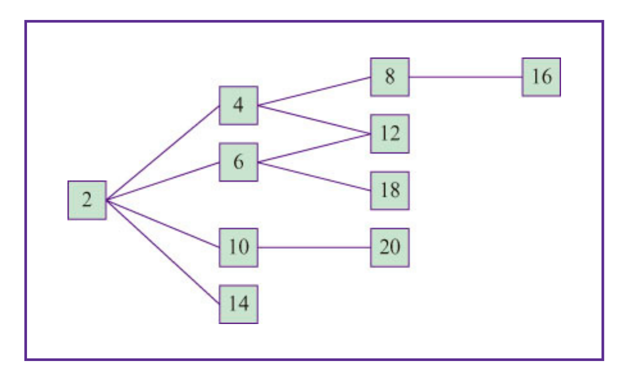


Figura 3.7.—Representación de la relación de divisibilidad de números naturales.

Actividad 4: Analiza la conversación de Ana con su madre, recogida al inicio de este capítulo, desde la óptica de las propiedades de la relación de orden.

Actividad 5: Dibuja cinco cuadrados de distintos tamaños y crea dos ordenaciones con ellos, la primera, de menor a mayor, y la segunda, de mayor a menor. Indica cómo son entre sí.

Actividad 6: Ordena de menor a mayor, con respecto a su tamaño, los siguientes instrumentos musicales: contrabajo, viola, violín, violonchelo.

Actividad 7: Describe el criterio que se ha seguido para ordenar los triángulos de la imagen:



Seriación

La seriación constituye una cierta manera de ordenar objetos siguiendo un criterio. No constituye una ordenación en el sentido matemático, ya que no requiere del cumplimiento de la propiedad transitiva. Por ejemplo, en la figura 3.8 se reproduce una seriación realizada con el criterio grande-pequeño. Se aprecia que no es una relación de orden, pues, si lo fuese, la tercera figura debería ser menor que la primera.

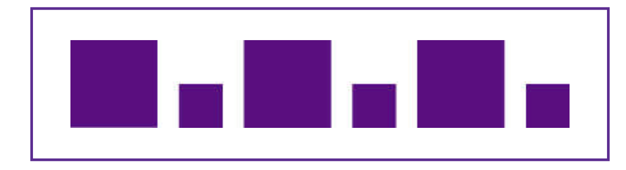


Figura 3.8.—Seriación siguiendo el criterio grande-pequeño.

Actividad 8: Describe la seriación de los elementos de la figura:



Actividad 9: Describe un criterio de seriación diferente para los elementos de la actividad anterior.

8. PATRONES

El vocablo «patrón» tiene varias acepciones, y la que más se acerca a la consideración de patrón en matemáticas es *modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual*. Un patrón se forma cuando existe una regularidad, o regla, que permite construir una secuencia o serie de elementos que verifican dicha regla. Vamos a considerar aquellos patrones en los que, a partir de un motivo inicial y por reiteración, se originan nuevos elementos. La figura 3.9 presenta tres ejemplos de series originadas según un patrón. El motivo inicial que origina el patrón es el núcleo de dicho patrón.

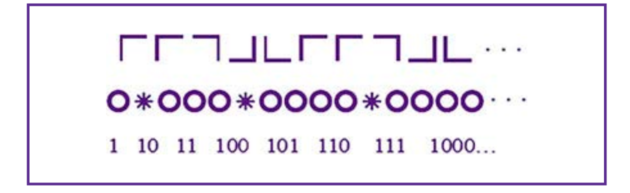


Figura 3.9.—Series originadas por un patrón.

Tipos de patrones

Las clasificaciones de los patrones se hacen atendiendo a diferentes características, algunas de las cuales recogemos. Según su dimensión, los patrones pueden ser de una, dos y tres dimensiones. Ejemplos de cada uno de ellos aparecen en la figura 3.10.

Según su formación, los patrones serán de repetición o de desarrollo. En los patrones de repetición el mismo motivo o núcleo se repite formando la serie; en los de desarrollo el núcleo se modifica, crece o decrece. En la figura 3.11 se recogen cuatro ejemplos de patrones, dos de repetición y dos de desarrollo.

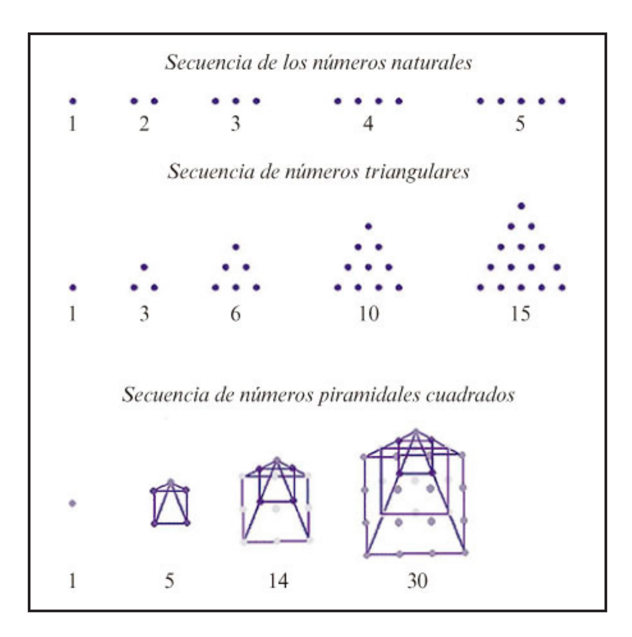


Figura 3.10.—Secuencias puntuales de números de distinta dimensión.

Actividad 1: Determina el núcleo en los patrones de la figura 3.12 y la regla que permite su formación.

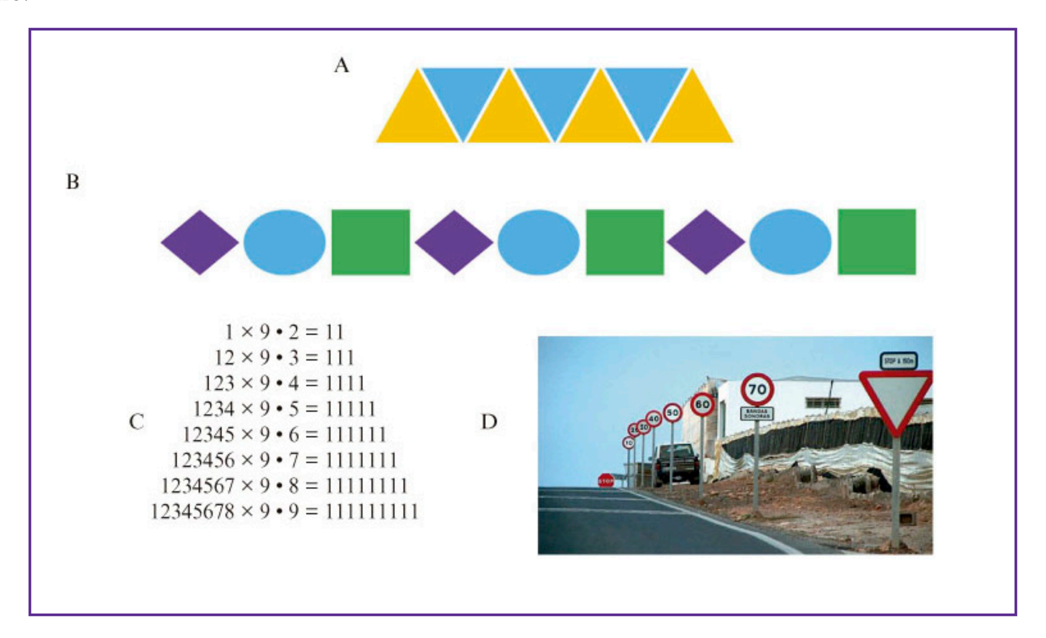


Figura 3.11.—Representación de dos patrones de repetición y dos de desarrollo.

9. EJERCITA TU APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1: Dadas la proposiciones p: «Jaime es español» y q: «Jaime es moreno», enuncia las proposiciones correspondientes en cada caso:

a) $\neg p$.
b) $\neg q$.
c) $p \vee q$.
d) $p \wedge q$.
e) $\neg p \wedge q$.

ACTIVIDAD 2: Completa las siguientes proposiciones para que tengan sentido con conectivos:

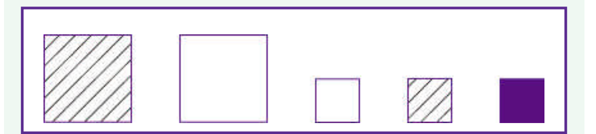
a) El círculo
Es redondo .... no es rayado.
.... es un triángulo.
Es rayado .... es blanco.
Es blanco .... es rayado.

b) El triángulo
Es rayado o .... es blanco.
.... es blanco .... no es redondo.
Es triangular .... no es redondo.

ACTIVIDAD 3: Completa la tabla con verdadero o falso.

	Es rayada	Es cuadrada	Es rayada o es cuadrada

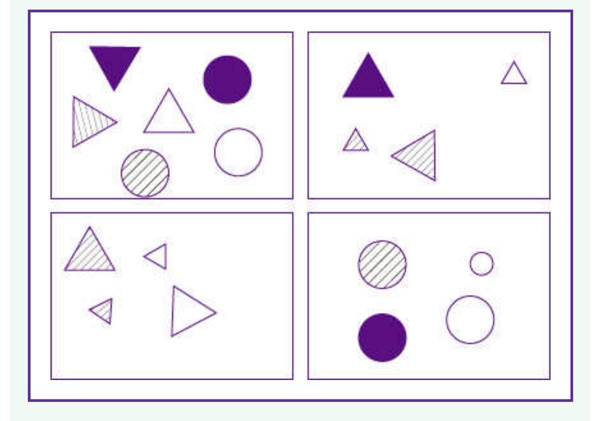
ACTIVIDAD 4: Analiza si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:



Referidas a las figuras dadas:

a) Si un cuadrado es grande, entonces es blanco.
b) Si un cuadrado es blanco, entonces es grande.
c) Si el cuadrado primero es rojo, entonces es grande.
d) Si el cuadrado primero es rojo, entonces es pequeño.
e) Un cuadrado es grande si y sólo si es blanco.
f) Un cuadrado es pequeño si y sólo si es rayado.
g) Si un cuadrado es rayado, entonces es pequeño.
h) Si un cuadrado es pequeño, entonces es blanco o rayado.
i) Si un cuadrado es pequeño, entonces es blanco y rayado.

ACTIVIDAD 5: Se han agrupado algunos elementos en cajas.



a) Decide ¿para qué cajas son verdaderas las proposiciones siguientes?:

- Hay redondos.
- No hay redondos.
- Hay triángulos.
- No hay triángulos.

b) Analizar, para la misma serie de tarjetas, las proposiciones y decide su veracidad:

- Hay negros.
- No hay negros.
- Hay no negros.
- No hay no negros.

¿Qué particularidad tienen las proposiciones agrupadas en *a*) y en *b*)?

ACTIVIDAD 6: Reflexiona sobre si las siguientes formas de organización son clasificaciones, ordenaciones o seriaciones:

a) La clasificación energética de los electrodomésticos.
b) La clasificación de la liga de fútbol.
c) La clasificación taxonómica de los mamíferos.
d) Cuando se les pide a los niños que ordenen sus juguetes.
e) Llevar el ritmo de una canción.
f) Colocar los cubiertos en un cajón preparado para ellos.
g) Separar la basura.

ACTIVIDAD 7: Cuatro parejas (hombre-mujer) se sientan a jugar a las cartas en una mesa redonda. Las mujeres se llaman: Amelia, Bárbara, Constanza y Daniela. Ninguna de ellas se sentó al lado de su pareja. Enfrente de Bárbara estaba sentada Daniela. A la derecha de la pareja de Bárbara estaba Constanza, y no había dos hombres juntos.
Determinar cómo estaban las cuatro parejas distribuidas en la mesa.

ACTIVIDAD 8: Se ha hecho una encuesta a 62 personas sobre el tipo de transporte, autobús, coche o moto, usado para desplazarse a la facultad. Las respuestas indican que algunos de ellos utilizan más de un transporte. Veinticinco se desplazan en autobús, 33 lo hacen en coche, 40, en moto, y siete, de las tres formas. Indaga para conocer el número de estudiantes que llegan a la facultad en dos tipos de vehículos.

ACTIVIDAD 9: Continúa las secuencias A y B: cuatro lugares más. Enuncia una regla para el patrón seguido por cada una de ellas.

A	B
$37 \times 3 = 111$	$1 \times 8 + 1 = 9$
$37 \times 6 = 222$	$12 \times 8 + 2 = 98$
$37 \times 9 = 333$	$123 \times 8 + 3 = 987$
$37 \times 12 = 444$	$1234 \times 8 + 4 = 9876$
$37 \times 15 = 555$	$12345 \times 8 + 5 = 98765$

ACTIVIDAD 10: Alberto Durero hizo un grabado llamado *Melancolía.* Representa un ángel deprimido y al fondo una rejilla de números como la que se recoge en la figura. En dicha rejilla hay dos celdas sin números. Determina los números que faltan en las celdas.



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6		12
4	15	14	

Responde las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué tipo de razonamiento se aplica cuando concluyes que es posible determinar los números que faltan?
b) ¿Qué tipo de razonamiento se aplica cuando determinas una regla para obtener los números?
c) ¿Qué tipo de razonamiento se aplica cuando utilizas la regla para obtener los números? Explica tus respuestas.

4 Pensamiento lógico-matemático

ELENA CASTRO-RODRÍGUEZ
ENRIQUE CASTRO

Pilar (3 años, 11 meses).

Las naranjas se llaman naranjas porque tienen color naranja.

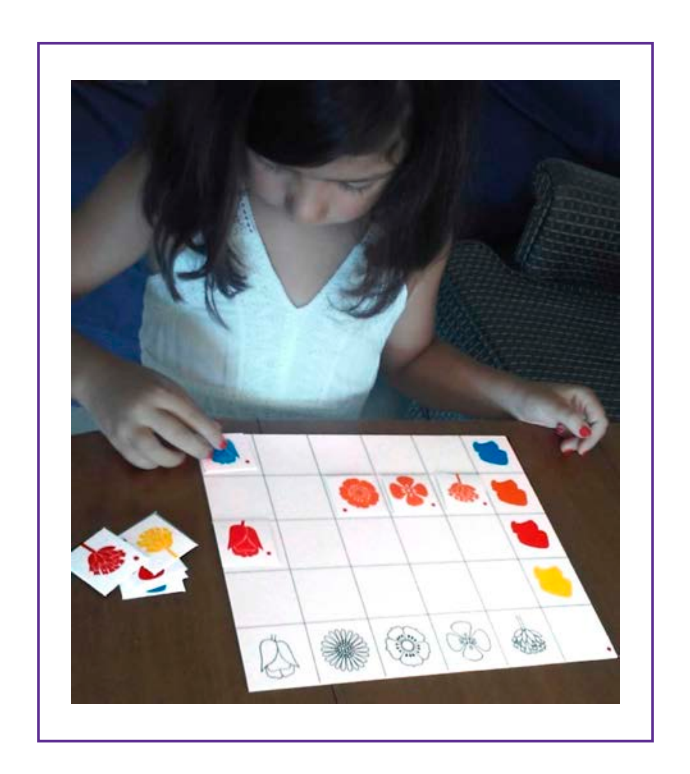


Figura 4.1.—Realización de una actividad lógica.

El pensamiento lógico-matemático forma parte de las experiencias diarias de los niños desde su más tierna infancia. A dicho pensamiento contribuye el sentido espacial, que se puede adquirir cuando construyen un puzle o trabajan las formas espaciales con juegos de construcción, y el sentido numérico que proporciona la acción de comparar la cantidad de caramelos que un niño tiene con la cantidad que posee su amigo. Pero también contribuyen al desarrollo de dicho pensamiento lógico-matemático acciones en las que los niños practican la ordenación y la clasificación con sus juguetes, ya que a través de sus juegos y actividades perciben regularidades y descubren patrones. Aunque este tipo de aprendizaje se considera informal, pone los fundamentos para el posterior aprendizaje formal de las matemáticas.

Las propuestas curriculares para la educación infantil han cambiado desde que se reconoció oficialmente este nivel educativo. En relación con el contenido de las matemáticas, que es la materia que nos ocupa, en los últimos tiempos no está configurado en torno a temas tradicionales (igual ocurre con otras disciplinas), y el pensamiento lógico-matemático, en alguna propuesta curricular, queda recogido en el apartado que hace referencia al ámbito del lenguaje, la comunicación y la representación, y en otras propuestas se le engloba bajo el paraguas del conocimiento del entorno. En este último caso, se plantean actividades que fundamentan aprendizajes matemáticos en el área de conocimiento del entorno y que tratan de proporcionar una formación general y equilibrada del estudiante, fomentar el desarrollo de competencias transversales (expresarse, comunicar, trabajar en equipo, resolver problemas…) y adquirir fundamentos de pensamiento lógico-matemático y científico.

En estos currículos se señala que el pensamiento lógico-matemático desempeña un papel fundamental en el desarrollo de las siguientes capacidades: identificar semejanzas y diferencias, comparar, clasificar, ordenar, seriar, designar, simbolizar, predecir, inferir, estudiar patrones, representar datos mediante gráficos y realizar sus primeros razonamientos.

En este capítulo nos centramos en las capacidades que los niños adquieren relacionadas con el pensamiento lógico-matemático. Trataremos la clasificación y la ordenación, y los patrones muy conectados con la ordenación. Centraremos asimismo nuestra atención en el aprendizaje y la enseñanza de estos contenidos matemáticos, y algunos otros constructos relacionados con ellos. Una vez finalizado su estudio, debes poseer conocimiento sobre el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los niños y haber adquirido capacidad para observar dicho desarrollo y preparar situaciones y tareas de aprendizaje que hagan posible que todos los escolares de las primeras edades adquieran conocimiento lógico-matemático.

ACTIVIDAD 1: Analiza el currículo nacional actual para la Educación Infantil recogiendo aquellos contenidos que hagan referencia al pensamiento lógico-matemático.

1. LA INDAGACIÓN

El pensamiento lógico-matemático se adquiere a través de la indagación, asociada a la percepción del entorno, la cual conlleva el desarrollo, por parte de los estudiantes, de ciertas destrezas en procesos básicos como inferir y predecir. Mediante la indagación de su entorno el alumno compara, clasifica, ordena y pone en serie los objetos con respecto a alguna de sus propiedades. También realiza predicciones y deducciones, estudiando patrones y haciendo gráficos con datos.

La actividad de indagación del entorno, como requisito para construir conocimiento lógico-matemático, exige que el niño se implique en:

- Identificar características (atributos o propiedades) que pueden ser categorizadas.
- Formular preguntas.
- Anticipar situaciones.
- Prever consecuencias.
- Observar los efectos de sus actos.
- Construir relaciones entre los fenómenos observados.

La indagación conlleva otras acciones, como observar y comparar, que recogemos a continuación.

1.1. Observar

La observación es el primer paso en el proceso de indagación y en la resolución de problemas. Se dice que observar es examinar atentamente, y también mirar con atención. La observación permite adquirir información de manera activa, normalmente a partir de los sentidos. Desde edad tempana, los escolares necesitan que se les dé la oportunidad de observar las propiedades de los objetos o eventos. El profesor debe ayudarles en este proceso haciéndoles que presten atención a determinados aspectos o atributos de los objetos o sucesos. Una forma de focalizar la atención de los escolares es haciendo preguntas sobre lo que sienten: ¿qué ves?, ¿qué oyes?, ¿cuál es su color?, o pidiéndoles que describan un objeto. Ser capaz de detectar características de los objetos es el punto de partida para llegar a realizar una comparación.

ACTIVIDAD 1: Indica tres objetos cercanos a los niños con los que trabajarías en una clase de infantil de 3-4 años haciéndoles preguntas para que descubran sus atributos. Escribe una relación de las preguntas que harías.

1.2. Comparar

Comparar conlleva establecer una relación entre dos objetos. Durante la etapa de infantil los niños llegan a percibir e identificar atributos de los objetos o eventos. La observación les permite percibir semejanzas y diferencias entre los atributos. Estos atributos pueden tener carácter cualitativo, como el color, o cuantitativo, como longitud, capacidad, peso, tiem-

po y temperatura. La comparación del mismo atributo en diferentes objetos en principio los niños la hacen de forma dual y extrema, normalmente expresada mediante adjetivos polares. La tabla 4.1 presenta un listado de tales comparaciones básicas, con las que se identifican y describen diferencias del mismo atributo entre dos objetos, por ejemplo, «la regla es más larga que el lápiz». La identificación y descripción de diferencias se pueden agrupar en dos grandes tipos: comparar cantidades de una magnitud continua (longitud, altura, capacidad, peso, tiempo, velocidad) o comparar cantidades de objetos discretos (caramelos, canicas, cromos...).

TABLA 4.1

Comparaciones básicas

• Largo - corto • Alto - bajo • Grueso - fino • Ancho - estrecho • Rápido - despacio • Cerca - lejos • Primero - último	• Grande - pequeño • Joven - viejo • Caliente - frío • Duro - blando • Mucho - poco • Todos - ninguno • Antes - después

Cuando los alumnos realizan comparaciones respecto a un atributo, aprenden más sobre él. El profesor puede dinamizar el proceso de comparar haciendo preguntas que centren la atención en las semejanzas y diferencias. ¿En qué se parecen? ¿En qué difieren? ¿Cuál es más alto? ¿Les cabe lo mismo?... El profesor ha de tener presente la importancia de que los niños de esta etapa trabajen en actividades de observación y comparación como paso previo para realizar clasificaciones y seriaciones. Al comparar los objetos o eventos, se percibe si son semejantes (se tiene la posibilidad de agruparlos en clases) o distintos (lo que permite decidir si uno es mayor que otro o está antes que otro en una serie).

ACTIVIDAD 2: En cada una de las siguientes comparaciones identifica el atributo respecto al que se comparan cantidades. Indica en cada caso si el atributo es cualitativo o cuantitativo.

a) Mi coche es más grande que el coche de Juan.
b) Mi muñeca es más alta que la tuya.
c) La pelota de Teo salta más que la de Tito.
d) La mesa pesa más que la silla.
e) La botella de litro tiene menos agua que la de cinco litros.
f) Pedro ha tardado más en llegar al colegio que su hermana.
g) El verde me gusta más que el rojo.

ACTIVIDAD 3: Escribe ejemplos que propondrías a los estudiantes sobre dos tipos de comparaciones: comparar cantidades discretas (grupos de objetos separados) y comparar cantidades de magnitudes continuas. Indica el contexto en que aparecerían dichas comparaciones y el nivel de los escolares.

ACTIVIDAD 4: Localiza en Internet actividades para la etapa de infantil en las que se realicen comparaciones. Escribe las palabras clave usadas para realizar dicha búsqueda.

2. OPERACIONES LÓGICAS: CLASIFICAR Y ORDENAR

Clasificar y ordenar son dos procesos intelectuales importantes que ponemos en juego cuando tratamos de organizar nuestro mundo. Ambos se derivan de la comparación de objetos o hechos. En la clasificación se trata de agrupar los objetos por semejanzas (presentar un atributo común). En la ordenación los objetos se organizan teniendo en cuenta sus diferencias (por ejemplo, más corto, más alto). Muy relacionado con el orden están las seriaciones que se construyen siguiendo un patrón. Comparar, clasificar, ordenar y seriar están en la base de otros conceptos matemáticos.

2.1. Clasificar

Algunos niños organizan sus juguetes poniendo juntos los cochecitos, los muñecos, las cani-

cas... A veces incuso dentro de ellos separan los que tienen diferente color o corresponden a juegos de la misma marca comercial. Esta organización de los juguetes equivale a clasificarlos. Se considera que la primera estructura operatoria y la más elemental que los individuos construimos es el agrupamiento o clasificación simple. La igualdad de atributos en objetos permite agruparlos, dando lugar a una clasificación según ese atributo (véase capítulo 3).

Una vez que los niños son capaces de identificar una propiedad (o atributo) en los objetos y compararlos de acuerdo con ella, pueden reunir los que sean similares y formar grupos con aquellos que poseen dicha propiedad. Se formarán tantos grupos como aspectos difererentes de la propiedad surjan en la situación que se les haya planteado y estén trabajando. Por ejemplo, si los niños están utilizando los bloques lógicos, pueden clasificarlos de acuerdo con la forma y agrupar las piezas redondas, las cuadradas, las triangulares y las rectangulares. Cuando todas las piezas están distribuidas, se tienen cuatro grupos o clases de piezas de acuerdo con la forma; este proceso da lugar a una clasificación de los bloques lógicos de acuerdo con sus distintas formas, como se muestra en la figura 4.2.

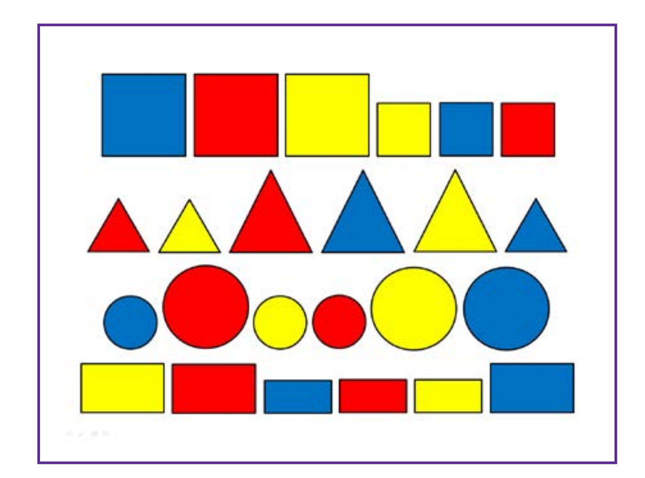


Figura 4.2.—Clasificación de bloques lógicos por la cualidad forma.

Para realizar una clasificación es necesario conocer el conjunto de elementos que se va a clasificar y el criterio por el cual se va a proceder a la clasificación. El criterio está basado en un atributo de los elementos a clasificar que puede tomar distintos valores; por ejemplo, si clasificamos un grupo de bolígrafos por color (el color es el criterio considerado, que en este caso toma los valores azul, negro y rojo). Al clasificar se forman clases que se corresponden con los distintos valores que puede tomar la propiedad por la que estamos clasificando. Todos los elementos (bolígrafos) pertenecen a alguna de las clases que se forman, por lo que en nuestro conjunto de bolígrafos podemos asegurar que no hay ninguna clase de bolígrafos de color verde.

Una tarea a realizar en el aula consiste en proponer a los niños que obtengan una colección de objetos (botones, «chuches», hojas de árboles...) para posteriormente comparar los elementos que la conforman y clasificarlos. En un principio el trabajo de clasificación se inicia tomando sólo una característica para posteriormente realizar clasificaciones basadas en dos o más características que sean inherentes a los objetos. Por ejemplo, se puede proponer a los niños que recorten figuras geométricas de una plantilla: triángulos, cuadrados y círculos. Una vez recortados, deben pintarlos de color (amarillo, rojo o verde) y colocarlos en un casillero o panel como el de la figura 4.3. Se realizaría así una clasificación atendiendo conjuntamente a dos atributos: forma y color.

Piaget centró la atención de sus estudios en dos tipos de clasificaciones: las que se perciben por el sentido de la vista, que llamó visuales, y las que se perciben por el tacto (sin necesidad de la vista), denominadas táctiles. Las clasificaciones táctiles llevarían, en el niño, un año de retraso respecto a las visuales. En ambos casos considera tres estadios o niveles en su desarrollo evolutivo con capacidades que difieren de un nivel a otro. Estos niveles son:

Primer nivel (comprende de 0 a 4 años y medio, aproximadamente). Cuando el niño organiza objetos y forma con algunos de ellos configuraciones espaciales que para él tienen un significado, la representación de algo tangible; por ejemplo, colocar algunas figuras de las dadas en forma de estrella; o

	△	□	○
Amarillo			
Rojo			
Verde			

Figura 4.3.—Plantilla para hacer una clasificación utilizando los criterios forma y color.

con los bloques lógicos tomar un cuadrado y un triángulo, ambos de igual o diferente color, y formar una casa. No tiene en cuenta todas las piezas que se le proporcionan. No se percibe que tenga en mente un criterio determinado para realizar la organización.

Segundo nivel (desde los 4 años y medio hasta los 6, aproximadamente). Realiza parcialmente una clasificación siguiendo un criterio. Aún no considera parte de los elementos de los que dispone. Se inicia en la idea de la inclusión de clases y la relación parte-todo. Por ejemplo, si ha organizado parcialmente bloques según su color, aprecia en algunos casos que en una misma clase hay unos que son grandes y otros que son pequeños.

Tercer nivel (a partir de 6 o 7 años, aproximadamente). Realiza verdaderas clasificaciones. Considera todos los elementos. El criterio para cualquier clasificación es estable. El niño elabora clases jerárquicas, lo que supone el reconocimiento de más de un atributo de los objetos. En este caso se ha construido la estructura lógica de clasificación. Por lo general, los niños de infantil no alcanzan este tercer nivel.

ACTIVIDAD 1: Diseña una actividad sobre clasificación para la etapa de infantil. Para dicha actividad, especifica de manera detallada el conjunto de elementos que se van a clasificar, el criterio para realizar la clasificación, el o los atributos en los que se basa y las clases formadas por dicho criterio. Describe cómo harías su desarrollo en el aula.

2.2. Ordenar y seriar

Los preescolares son capaces de captar diferencias y expresarlas verbalmente: «soy más alto que tú», «corro más que tú», «quiero el trozo de tarta más grande»… Les gusta alinear sus juguetes, aunque con frecuencia no suelen mantener una regla. Esta organización corresponde al inicio de una ordenación (véase capítulo 4).



Figura 4.4.—Juego de muñecas rusas ordenadas.

La ordenación surge de la comparación de dos elementos u objetos al percibir que son distintos (diferentes) en relación con un atributo considerado. Se decide en este caso cuál va antes y cuál después (cuál es más grande y cuál es más pequeño). El proceso de comparar da lugar a la ordenación o colocación de las cosas en una sucesión desde el primero hasta el último. Seriar consiste en ordenar colecciones de objetos manteniendo constantes unos atributos a excepción de otros (uno o varios) que sirven de comparación. Se considera que la seriación antecede a la relación de orden y está muy ligada al trabajo y estudio de patrones.

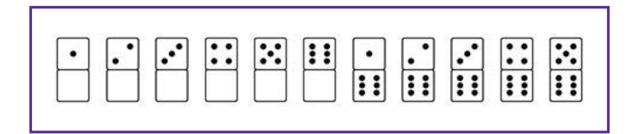


Figura 4.5.—Fichas de dominó ordenadas según la suma de sus puntos.

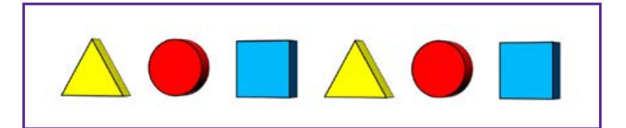


Figura 4.6.—Serie constituida por figuras geométricas.

Igual que ocurre con las clasificaciones, se distinguen seriaciones visuales y táctiles. Las visuales tiene sus comienzos entre los 4-5 años de edad. En sus inicios, los niños hacen seriaciones en forma de figuras (por ejemplo, una montaña, escalera) y hacia los 6-7 puede intercalar piezas en una serie ordenada. La seriación por tacto presenta los mismos estadios que la seriación visual pero con un retraso de un año, eliminándose, en este caso, el factor figural.

Actividad 2: Indica una colección de seis objetos que permitan a niños de 4-5 años ordenarlos.

2.3. Capacidades asociadas a la clasificación y seriación

Los currículos oficiales recomiendan que en la etapa de educación infantil los niños aprendan a ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades similares.

Algunos documentos curriculares presentan capacidades que deben adquirir los niños relacionadas con la clasificación y ordenación/seriación. Recogemos a continuación las que corresponden a infantil.

Capacidaes relacionadas con la clasificación:

- Reconocer semejanzas y diferencias entre atributos de objetos.
- Emparejar objetos idénticos.
- Clasificar de forma dicotómica un conjunto de objetos según un criterio.
- Clasificar según un criterio.
- Determinar criterios para hacer grupos de objetos dados.
- Reconocer el criterio por el que se hizo un agrupamiento.

Capacidaes relacionadas con la seriación:

- Reconocer diferencias relativas entre dos o más objetos.
- Utilizar razonamiento transitivo.
- Ordenar de modo seriado entre cinco y diez objetos (por tanteo).
- Dada una serie, insertar algún objeto.

3. PATRONES

Un patrón consiste en una repetición regular de objetos, números, sonidos, movimientos o formas. Se considera estructura del patrón la relación entre sus diversos componentes. Un ejemplo de patrón se presenta en la figura 4.7.



Figura 4.7.—Ejemplo de patrón.

Los patrones se encuentran en nuestro entorno (en la naturaleza), en distintas disciplinas (el arte, la ciencia, la música). El trabajo con patrones se considera fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático; más concretamente se le reco-

noce ser precursor del pensamiento algebraico ya que permite llegar a generalizaciones, contribuyendo directamente a la capacidad de establecer modelos matemáticos, y sentar las bases para el desarrollo de habilidades algebraicas. Por otra parte, la búsqueda de un patrón es una estrategia importante en resolución de problemas.

Las experiencias de los niños con patrones son numerosas, pues se encuentran en sonidos, música, canciones rítmicas, cuentos… A partir de dichas experiencias aprenden a identificar, analizar, construir y extender patrones.

ACTIVIDAD 1: Recuerda la canción «Un elefante se balanceaba sobre la tela de una araña…» e investiga si hay patrones en ella. En caso afirmativo, describe en qué consisten.

La importancia de trabajar con patrones, en edades tempranas, se resalta en muchos documentos curriculares, los cuales destacan la necesidad de que los niños participen en experiencias que desarrollan capacidades que permitan ordenar, clasificar y secuenciar, crear patrones, reconocer secuencias predecibles y desarrollar el vocabulario asociado. Aunque los patrones están en parte integrados en el plan de estudios de las matemáticas, también se ligan a otras materias, como las ciencias, el arte, el lenguaje, la música y la educación física. Las directrices curriculares sugieren que los niños exploren patrones y relaciones en el medio, en el lenguaje, en formas, diseños, movimiento, así como en conjuntos de números, de modo que no se limiten a un área específica de aprendizaje sino que impregnen el plan de estudios.

ACTIVIDAD 2:

a) Busca la orden de 5 de agosto de 2008 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía. BOJA, 169, 17-53.
b) Recoge de dicha orden los apartados que hablan de patrones en el primer ciclo de infantil.
c) Realiza un análisis de dichos párrafos, centrándote en sus ideas clave.

Trabajar con patrones ayuda a los niños a dar sentido a las matemáticas. Pueden aprender que las matemáticas no son un conjunto de hechos y procedimientos no relacionados; reconocer y trabajar con patrones ayuda a los niños pequeños a predecir qué va a pasar, hablar acerca de las relaciones y ver las conexiones entre los conceptos matemáticos y su mundo.

Con respecto a los patrones, la investigación ha mostrado que los niños son capaces de:

- Reconocer patrones en diferentes contextos, en el ambiente, en diseños (papel de envolver regalos), en la tela de la ropa, en pegatinas.
- Seguir (continuar) un patrón con objetos reales, material manipulativo, mediante representación gráfica.
- Describir con sus propias palabras cuál es la regularidad que crea el patrón.
- Predecir un término, no lejano, de la secuencia creada por un patrón.
- Describir una regla general para la determinación de cualquier etapa del patrón.
- Trabajar patrones tanto de repetición como de desarrollo (crecimiento y de disminución).

Para desarrollar la comprensión sobre patrones, se aconseja que los maestros utilicen estrategias de instrucción que ayuden a los estudiantes a responder a preguntas como las siguientes:

- ¿Cómo se continúa el patrón?
- ¿Qué cambios se producen cuando se continúa el patrón?
- ¿Qué queda igual cuando se continúa el patrón?
- Se puede reflexionar sobre «qué pasa si…» para extender el patrón hacia nuevas direcciones.

Los estudiantes desarrollan su comprensión de los patrones y la relación entre ellos a través de experiencias con patrones cuyos objetos tienen forma y naturaleza distintas y aparecen en diferentes contextos, como se muestra en la tabla 4.2.

El estudio de patrones se recomienda como uno de los aspectos ligados al desarrollo inicial del pen-

TABLA 4.2

Patrones en distintos contextos

Personas	niño-niña, niño-niña, niño-niña…
Acciones	salto-salto-parada, salto-salto-parada…
Diseño	
Sonidos	pin-pan-pun, pin-pan-pun…
Objetos	. . .
Símbolos numéricos	11, 22, 33, 44, 55...
Formas geométricas	
Letras	ABCSS, ABCSS, ABCSS…

samiento algebraico; de ahí la importancia de que desde los primeros niveles se proporcione a los estudiantes actividades en las que trabajen con patrones y que estén orientadas a que construyan fundamentos algebraicos sólidos.

3.1. Clasificación de patrones

Los patrones se clasifican de acuerdo con su estructura independientemente del contexto en el que se produzcan. Se consideran patrones de repetición y patrones de desarrollo (crecimiento o decrecimiento).

Patrones de repetición

Este tipo de patrones contienen una cierta secuencia de elementos que se repiten una y otra vez. Por ejemplo: A-B-A-B-A-B… o AA-BB-AA-BB-AA-BB… La parte que da lugar a la repetición se denomina núcleo del patrón, el cual está formado por un conjunto de componentes individuales que se repiten sistemáticamente y conforman la regularidad. El patrón de la figura 4.8 es de repetición, presenta un núcleo de cuatro elementos diferentes entre sí.



Figura 4.8.—Representación de un friso formado por un patrón.

ACTIVIDAD 3: Dibuja el núcleo del patrón de la figura 4.8.

Un friso obtenido mediante traslaciones de una pieza básica es un ejemplo de patrón de repetición.

Los patrones de repetición son particularmente importantes debido a los vínculos con la iteración en la multiplicación y la medición. La complejidad de estos patrones es diversa, dependiendo de las variables que intervienen en cada uno de ellos.

- Naturaleza del atributo en el patrón. Hay atributos que son familiares y más claros para los niños, como el color. El patrón aumenta en complejidad para los niños si conlleva cambios en uno o más atributos que son menos obvios para ellos, como la forma, el tamaño, el grosor, la textura o la orientación.
- El número de atributos que cambian. Los patrones más simples conllevan cambio en un solo atributo, en el núcleo. Por ejemplo, en el patrón de repetición de la figura 4.9, construido con bloques lógicos, el atributo que cambia es la forma, mientras que el color, el tamaño y el grosor permanecen constantes.



Figura 4.9.—Patrón de repetición, dos elementos en el núcleo.

- El número de elementos en el núcleo del patrón. El patrón de la figura 4.9 tiene un núcleo compuesto por dos elementos (cuadrado y triángulo). El de la figura 4.10 tiene un núcleo con tres elementos (cuadrado, cuadrado, triángulo).

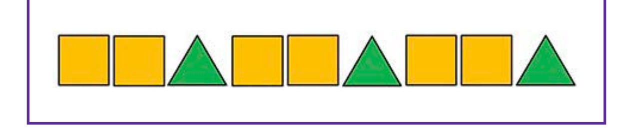


Figura 4.10.—Patrón de repetición, tres elementos en el núcleo.

- El número de atributos que cambian en el núcleo de un patrón. El patrón de la figura 4.11 es más complejo que los de las figuras 4.9 y 4.10 porque los elementos de su núcleo tienen distinto tamaño y posición.

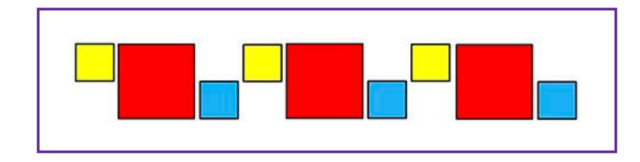


Figura 4.11.—Patrón de repetición, tres elementos del núcleo cambiando tamaño y posición.

Realizar una variedad de experiencias de aprendizaje ayuda a los estudiantes a desarrollar conceptos acerca de los patrones, como por ejemplo establecer relaciones en y entre patrones y realizar generalizaciones (mostrar cómo un patrón puede ser extendido). Es importante que los niños tengan oportunidad de investigar patrones, empleando materiales manipulativos concretos. A diferencia de las tareas de papel y lápiz, en la que los estudiantes colorean formas o dibujan objetos omitidos en un patrón, las experiencias con materiales concretos permiten a los estudiantes manipular y cambiar fácilmente elementos dentro de un patrón.

Patrones de desarrollo

Los patrones de desarrollo aumentan o disminuyen de forma sistemática produciendo expansión o reducción del elemento inicial. Pueden presentar

una estructura en una o tres dimensiones. El patrón de crecimiento más simple empieza con un elemento en el primer término y se incrementa con un único elemento del mismo tipo en cada término subsiguiente. En la figura 4.12 se recogen ejemplos de patrones de desarrollo, en una y dos dimensiones.

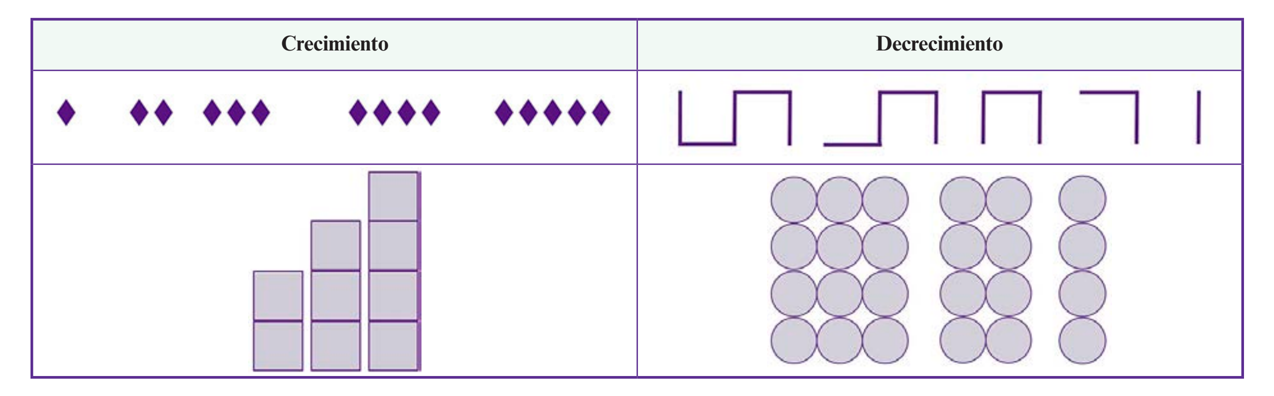


Figura 4.12.—Patrones de desarrollo, lineales y en expansión.

3.2. Aprendizaje de patrones

Entre las experiencias a través de las cuales los estudiantes aprenden sobre patrones y relaciones entre patrones, recogemos las siguientes:

- **Identificar patrones.** Se identifican patrones en el entorno, en la naturaleza, en la música, en el arte, entre otros. El profesorado debe potenciar que sus estudiantes identifiquen patrones en estos medios.
- **Explicar los patrones identificados.** Explicar los patrones consiste en relatar con palabras propias lo identificado. Esto ayuda a los niños a comprender la naturaleza repetitiva de los patrones.
- **Leer patrones.** Leer patrones significa señalar y nombrar cada elemento (por ejemplo, cuadrado rojo, cuadrado rojo, triángulo verde, cuadrado rojo, cuadrado rojo, triángulo verde…). La lectura de patrones ayuda a los estudiantes a reconocer el cambio de atributo, el número de elementos y el núcleo del parón.
- **Describir patrones.** Describir patrones conlleva identificar el cambio de atributo, el número de elementos en el núcleo del patrón y el tipo de estos elementos. Después de leer un patrón los estudiantes están mejor preparados para describirlos. Los profesores deben animar a los estudiantes a describir los patrones en lenguaje matemático.
- **Extender patrones.** Extender un patrón significa continuar la serie que determina. Una de las cosas que aprenden los estudiantes es que los patrones se pueden extender. Para extenderlos deben fijarse en su núcleo y como continúa éste.
- **Hallar la regla que sigue el patrón.** La regla de la formación del patrón expresa su generalización. Las experiencias de describir y extender patrones ayudan a los estudiantes a realizar generalizaciones que pueden expresar como reglas, es decir, descripciones concisas de cómo se repite el patrón. En los primeros niveles, los niños expresan la regla del patrón de manera informal (por ejemplo, en este patrón hay dos triángulos rojos y un cuadrado amarillo).
- **Traducir patrones.** La estructura de un patrón se puede expresar en diferentes notaciones. El paso de una notación a otra, manteniendo la estructura, se considera una traducción entre esas representaciones. Por ejemplo, los patrones siguientes tienen la misma estructura y distinta notación:

— Izquierda, derecha, derecha, izquierda, derecha, derecha, izquierda, derecha…
— Triángulo, cuadrado, cuadrado, triángulo, cuadrado, cuadrado, triángulo…
— Arriba, abajo, abajo, arriba, abajo, abajo, arriba, abajo, abajo…

Reconocer que el mismo patrón se puede representar de diversas maneras sustituyendo sus elementos por signos más abstractos, como una serie de letras, es un paso importante en el proceso de generalización. Por ejemplo, el patrón anterior se puede representar como ABB, ABB, ABB...

- **Hallar elementos omitidos en un patrón.** Identificar elementos que faltan en un patrón, elementos que se han omitido. Un ejemplo se recoge en la figura 4.13, en la que es necesario completar el objeto que falta en el núcleo de la posición cuarta.

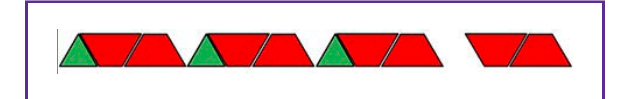


Figura 4.13.—Patrón lineal, falta un elemento en la posición cuarta.

Las actividades en las que hay que determinar un elemento oculto u omitido aumentan la comprensión de las relaciones entre los elementos del patrón y ayuda a detectar su estructura.

3.3. Progresión del trabajo con patrones

En general, las actividades con patrones en la etapa de infantil se pueden reducir a cinco tipos:

- Identificar una regularidad.
- Reproducir una serie finita visual de objetos (visual, auditiva y gestual).
- Identificar el núcleo generador de una serie repetitiva.
- Construir la sucesión engendrada por repetición de un motivo simple.
- Continuar una secuencia aplicando el patrón.

Un ejemplo de progresión de las diversas actividades que se pueden realizar en la etapa de infantil se muestra en la tabla 4.3.

3.4. Enseñanza de patrones

Se aconseja que en educación infantil los niños trabajen con patrones realizando tareas de distinto tipo, entre ellas traducir patrones entre diferentes

TABLA 4.3

Desarrollo progresivo del trabajo con patrones repetitivos

Edad	Progresión	Descripción
3 años	Reconocer patrones	Estoy viendo un patrón en una camisa con tiras blancas y negras: blanca, negra, blanca, negra...
4 años	Completar patrones Copiar o reproducir patrones Extender patrones Copiar o reproducir patrones	Identificar un elemento omitido en un patrón sencillo del tipo ABAB. Se trata de mostrar objetos en fila con uno de ellos omitido, ABAB_BAB…, y pedir que lo identifiquen y lo rellenen. Dado un conjunto de objetos en fila ABABAB, reproducir la serie en otro lugar. Dados objetos en fila, ABABAB, añadir AB al final (varias veces). Dado un conjunto de objetos en fila, ABBABBABB, reproducir la serie en otro lugar.

TABLA 4.3 *(continuación)*

Edad	Progresión	Descripción
5 años	Extender patrones	Dados objetos en fila, ABBABBABB, añadir ABB al final (varias veces).
6 años	Reconocer el núcleo o bloque que se repite en una serie	Dados objetos en fila, ABBABBABB, identificar el núcleo, ABB, que se repite en el patrón.

representaciones. Un tipo de ejercicio apropiado para infantil es traducir un patrón entre diferentes tipos de materiales manipulativos; por ejemplo, realizar un patrón con los bloques lógicos y traducirlo con mosaicos de colores. A continuación, representarlo con regletas Cuisenaire. Proponer traducciones entre distintas representaciones, como las enactivas, las gráficas y las simbólicas. Podría empezar por abordar un patrón con material manipulativo, interpretarlo y después escribirlo en forma simbólica empleando letras para representar el mismo patrón. En el ejemplo de la figura 4.14 se presentan tres situaciones de patrón en diferentes sistemas de representación.

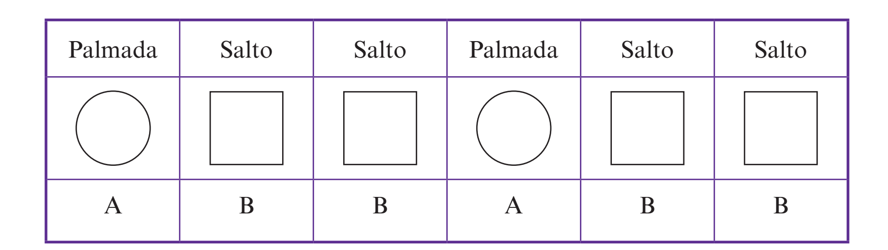


Figura 4.14.—Tres formas de expresar un patrón con la misma estructura.

Destacar las diferencias y las semejanzas entre patrones que se hayan traducido, manteniendo la estructura y realizando preguntas a los niños como las siguientes: ¿En qué se parecen estos patrones? ¿Qué tienen de diferentes estos patrones? La comparación de patrones traducidos enfatiza la equivalencia de su estructura matemática.

Patrones numéricos

Los patrones numéricos son muy abundantes y están presentes desde los primeros aprendizajes numéricos de los niños. Un niño, ante la figura 4.15, puede contar y decir: uno, uno, uno..., señalando cada vez un círculo, considerando el número como la repetición de la unidad; lo que se está constuyendo es una serie repetitiva en la que el primer elemento se repite indefinidamente.

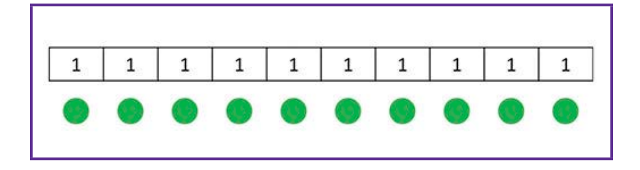


Figura 4.15.—Los números como patrón o serie repetitiva.

Pero los números tienen también un aspecto acumulativo que se suele mostrar durante los primeros años de aprendizaje mediante la escalera de los números, con modelos de patrón creciente tales como el que aparece en la figura 4.16.

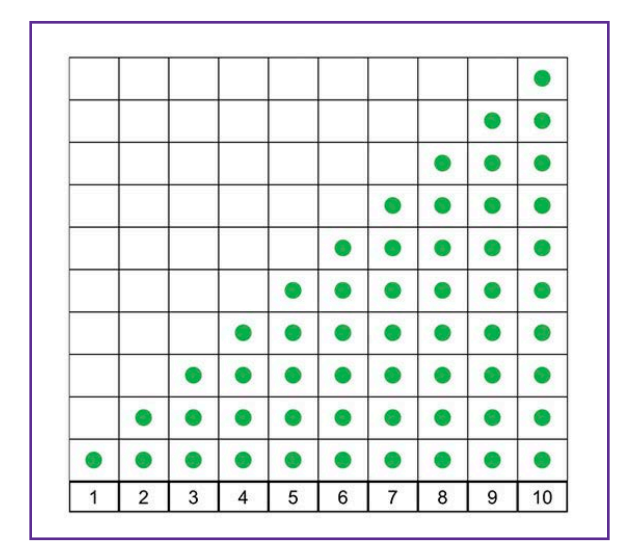


Figura 4.16.—Los números como un patrón o serie creciente.

Patrones con formas y colores

Es usual utilizar atributos de objetos para reconocer patrones e identificar relaciones; por ejemplo, hacer trenes con bloques de construcción en donde cada vagón se parece (o difiere) al vagón que sigue en dos atributos (o maneras). Analizar trenes para descubrir el patrón y continuarlo y poner algún elemento que falte.

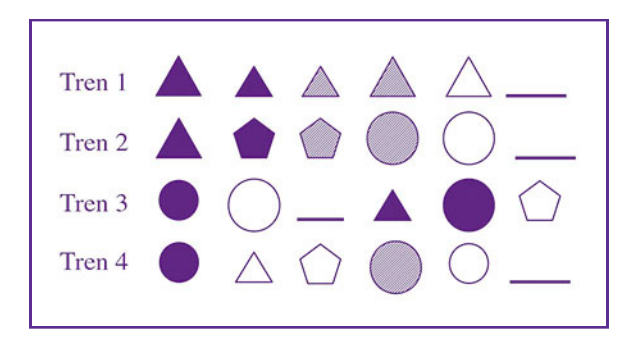


Figura 4.17.—Patrones con bloques.

Construir un tren (con al menos seis vagones) en el que cada vagón tenga exactamente un atributo diferente del vagón que le sigue. Comparar con el de otros compañeros. Indicar si son iguales esos trenes.

Construir un tren (con al menos seis vagones) en el que cada vagón tenga sólo un atributo igual al siguiente. Comparar con el tren de otro compañero. Indicar si se parecen en algo.

ACTIVIDAD 4: Otros objetos, como botones de colores, se pueden utilizar para elaborar trenes. Describe una tarea que propondrías a estudiantes de 3-4 años utilizando botones. Señala otros objetos con los que se podrían hacer tareas similares.

4. PENSAMIENTO SIMBÓLICO. DESIGNAR/REPRESENTAR

Por medio de las actividades de clasificación los niños de infantil construyen nuevos conceptos a los que tienen que designar. La acción de designación consiste en representar un objeto, una persona, un proceso, una acción, una serie, mediante un signo. Es importante resaltar que en esta acción de designación no está permitido asignar un mismo signo a dos cosas diferentes.

Las actividades de designación o representación ocupan un lugar importante en los primeros aprendizajes escolares. Los investigadores en didáctica conceden un papel importante a aquellas tareas en las que se requiere representar los conceptos y procesos en distintos registros (gráfico, simbólico), así como a las que suponen pasar de un registro de representación a otro. Creen que con ellas se favorece un aprendizaje con comprensión.

5. GRÁFICOS

Los procesos básicos de pensamiento, tales como comparar, clasificar, ordenar, predecir e inferir, se ponen en juego en la recolección, interpretación y análisis de datos. Una de las expectativas que se tienen de la educación infantil es que los niños recojan datos de su entorno, los plasmen en gráficos y los interpreten. Consideremos el siguiente ejemplo.

La maestra oye a Juan y María hablar en voz alta. Se acerca y escucha la siguiente discusión:

—Juan: ¡La pintamos de azul!

—María: ¡No! ¡No! ¡De rojo!

—Juan: ¡Que no!

—Maestra: ¿Cuál es el problema?

—Juan: Tenemos que pintar la casa del señor Lucas (la mascota de clase) y yo quiero que sea azul y María la quiere roja.

—Maestra: Quizá hay alguna forma de solucionar el problema; preguntemos a vuestros compañeros qué color les gusta más y veamos qué prefiere la mayoría. Lleva a los escolares a la mesa donde hay policubos. Vamos a coger los bloques azules y rojos de la caja de los policubos. En esta mesa vamos a poner un bloque azul o un bloque rojo según quiera cada niño.

—Juan: Ya veo, cada niño puede votar, ¿no?

María y Juan recorren la habitación explicando el problema a cada compañero. Cada escolar se acerca a la mesa, elige un bloque del color que prefiere y lo coloca haciendo una torre de bloques del mismo color. Finalmente, quedan dos torres, una azul y otra roja.

La maestra dice a los chicos que muestren los votos.

—María: La torre roja es más alta. A más niños les gusta la idea de pintar la casa de rojo.

—Maestra: ¡Bien! La pintaremos de rojo como quiere la mayoría de los niños de la clase.

Recolectar, reunir e interpretar información numérica es una destreza necesaria en un mundo inundado por los datos. En la etapa de educación infantil los gráficos se trabajan fundamentalmente para comparar atributos de manera visual. El trabajo con gráficos en el aula tiene interés en esta etapa, ya que cuando un escolar realiza un gráfico, pone en juego diversas habilidades básicas como: la clasificación, el conteo, la comparación de cantidades, la correspondencia uno a uno o la comunicación de las relaciones matemáticas de igualdad y desigualdad a través de la descripción de los datos.

Para trabajar con gráficos, es imprescindible seleccionar un tema adecuado sobre el que realizarlos. Cualquier tipo de pregunta de interés para el escolar que pueda ser resuelta por él mismo a través de la investigación y la recogida de información es adecuada para representar de forma gráfica. Algunos de los temas que pueden ser de interés son: número de hermanos y hermanas; color de pelo, ojos o ropa; tipos de mascotas; talla de zapato; programa de televisión favorito (o personaje); comida favorita; número de semillas que contiene una manzana, naranja o limón; ciudad o población de nacimiento; frecuencia de cada color en una bolsa de chucherías.

5.1. Fases de desarrollo para la realización y comprensión de gráficos

La enseñanza y el aprendizaje de gráficos no comienzan con la realización de gráficos estadísticos convencionales, que sería el estadio final de desarrollo. Para que los escolares lleguen a realizar y comprender este tipo de gráficos, es necesario un trabajo gradual a través de cinco fases. Las tres primeras se pueden abordar en la etapa de educación infantil, mientras que la cuarta y la quinta se desarrollan en etapas posteriores.

Fase 1. Gráficos con objetos

La primera fase consiste en realizar gráficos con objetos. Se inicia a los niños en la construcción de gráficos utilizando objetos reales que puedan ser manipulados por ellos. En un primer momento, es aconsejable el uso de materiales que puedan mantener su posición sin ser derribados o empujados por los escolares. Posteriormente, se puede utilizar cualquier material que pueda ser alineado, como bloques de cubos, cuentas para collares, botones, legumbres o chocolatinas de colores.

En esta fase sólo se comparan los objetos respecto a un atributo que presenta dos variables. La base para la comparación es la correspondencia uno-a-uno y la visualización de la longitud o altura de las barras del gráfico.

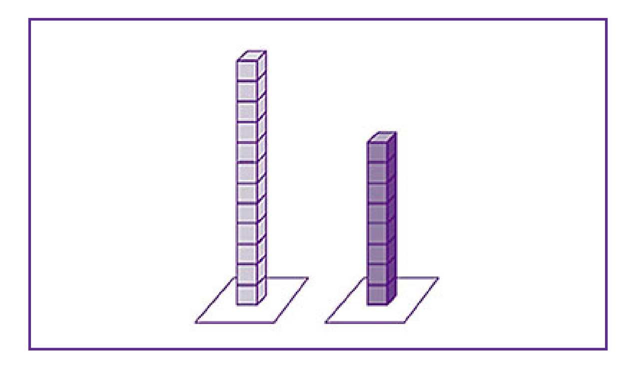


Figura 4.18.—Gráfico propio de la fase 1.

Fase 2. Gráficos con imágenes

En la segunda fase, las imágenes de los objetos sustituyen a los objetos reales. Las imágenes se colocan sobre un gran panel, en la pizarra o en un póster con columnas. Cada niño pega o fija una imagen en la columna correspondiente. En esta fase es posible comparar más de dos objetos y realizar un registro permanente de ello. Por ejemplo, pegando pegatinas en un papel o en un mural. Con el gráfico de la figura 4.19 los escolares pueden comparar en qué mes del año hay más nacimientos observando en cuál hay más personas.

Enero	Febr.	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept.	Oct.	Nov.	Dic.

Noviembre es el mes con más nacimientos.
En marzo, abril y julio no hubo nacimientos.
Un mes tuvo tres nacimientos.
Tres meses tuvieron dos nacimientos.
Cuatro meses tuvieron un nacimiento.

Figura 4.19.—Ejemplo de gráfico de la fase 2.

En esta segunda fase, además del uso de recursos como pegatinas, papeles recortados y pegamento, pueden utilizarse los mismos materiales que en la primera, pero en este caso el gráfico recogerá más de dos atributos.

Fase 3. Gráficos con papel cuadriculado

En la tercera fase los escolares siguen empleando imágenes para construir los gráficos, pero en su lugar utilizan cuadrados de papel de distinto color en sustitución de las imágenes de la fase anterior. Un ejemplo de este tipo de gráfico se muestra en la figura 4.20.

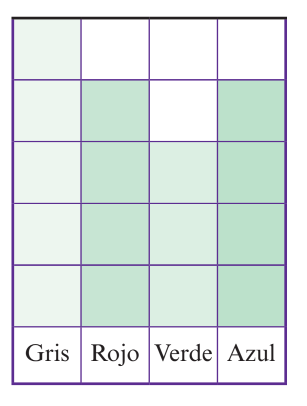


Figura 4.20.—Gráfico propio de la fase 3.

En el gráfico anterior se han alineado cinco columnas, una por cada color de una serie de bloques. A cada niño se le entrega un papel cuadriculado, tijeras y pegamento para que recorten cuadraditos y los peguen en la columna de su color favorito. El uso de cuadrados de papel para la realización de gráficos prepara el camino para el trabajo más abstracto con papel cuadriculado correspondiente a la siguiente fase.

Fase 4. Manipulación de papel

Después de que el escolar haya experimentado con los tipos de gráficos de las fases anteriores, puede introducirse la cuarta fase, en la que se utiliza el papel cuadriculado para su realización. Cada uno de los cuadrados de dicho papel cuadriculado puede ser sombreado representando una unidad, como muestra el gráfico de la figura 4.21.

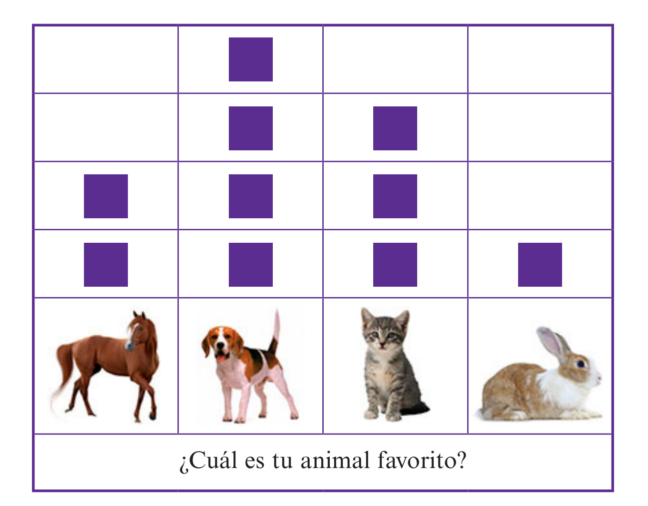


Figura 4.21.—Gráfico representativo de la fase 4 sobre preferencias de animales.

Fase 5. Gráficos convencionales

La quinta fase introduce en el uso de gráficos estadísticos convencionales. Como se ha indicado anteriormente, las fases 4 y 5 no corresponden al período de educación infantil.

Actividad 1: Inventa una actividad que sea adecuada para cada una de las tres primeras fases del desarrollo de los gráficos en infantil.

5.2. Discusión de un gráfico

Una tarea de interés es aquella en la que los estudiantes hablan de un gráfico y expresan lo que ven en él. Cuando el profesor pide a los niños de infantil que hablen de sus gráficos y los describan, debe procurar que utilicen expresiones comparativas tales como: «más que», «menos que», «igual que». Asimismo, deben emplear términos polares: grande-pequeño, alto-bajo, y expresiones con cuantificadores: todos, bastantes, ninguno, alguno, al menos uno. Por ejemplo:

«A es alto y B es pequeño».
«A tiene/es más que B».
«B tiene/es menos que A».
«A tiene/es igual que B».
«A es más largo/alto/grande que B».
«B es más corto/bajo/pequeño que A».
«El más alto de todos es D».
«El más bajo es E».
«Todos son altos».
«Ninguno tiene tantos como…».

Actividad 2: Los niños de infantil pueden centrar su atención en e investigar algún aspecto de su interés, recolectar datos sobre él y representar la información gráficamente. A partir del gráfico pueden surgir preguntas o problemas que hay que resolver. Propón un centro de interés en el cual una de las tareas que han de hacer los niños sea recoger datos, construir un gráfico y comentarlo.

6. RAZONAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas es una competencia transversal y, por tanto, debe ser practicada con todos los contenidos de la etapa. En este apartado nos

referimos exclusivamente a los problemas denominados de lógica. Son problemas que no requieren conocimientos específicos de aritmética y en los que hay que emplear algún tipo de razonamiento lógico para alcanzar la solución. A los niños de infantil hay que plantearles situaciones problemáticas en las que tengan que poner en juego razonamientos inductivos y/o deductivos.

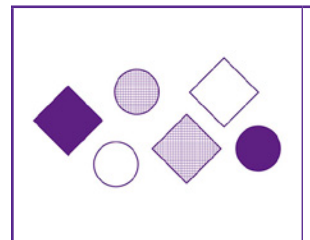
ACTIVIDAD 1: Analiza el tipo de razonamiento que hace Pilar en la frase introductoria de este capítulo.

Para los procesos de razonamiento inductivo se les puede proponer una tarea en la que deben descubrir la regla implícita en una situación y continuarla. Por ejemplo, sobre un tablero de doble entrada, extender y completar una serie lógica. Otra tarea puede proponer rellenar casillas vacías, en una tabla de doble entrada (figura 4.22) con casillas rellenas y vacías. Las casillas vacías hay que rellenarlas de acuerdo con las que ya están rellenas.



Figura 4.22.—Tableros lógicos.

Los procesos de razonamiento deductivo se pueden abordar en situaciones en las que se presenta un conjunto de objetos o piezas (por ejemplo, de bloques lógicos) sobre los que se dan una serie de enunciados. Resolver el problema consiste en encontrar el elemento desconocido a partir de la información que se proporciona.



Estoy pensando en una de estas piezas. Señala cuál es sabiendo que:

- No es un cuadrado
- No es blanca
- No es negra

Figura 4.23.—Tarea de descubrimiento.

Los bloques lógicos permiten desarrollar el razonamiento. Proponemos algunos ejemplos de tareas. A modo de adivinanza:

• Tengo tres lados • Soy rojo • Soy grande • ¿Quién soy?	• Soy azul o rojo • Tengo tres lados • No soy grande • ¿Quién soy?
• No soy rojo • No soy azul • Tengo cuatro lados • Soy pequeño • ¿Quién soy?	• No soy grande • No tengo lados • Soy amarillo • ¿Quién soy?

ACTIVIDAD 2: Analiza la tarea infantil de adivinanzas anterior e indica en qué apartado se describe sólo una pieza y en cuál más de una pieza de los bloques lógicos.

7. EDUCACIÓN DEL PENSAMIENTO LÓGICO

Los niños de 3 a 4 años pueden realizar numerosas actividades de clasificación de los objetos que manejan en función de: su utilización, su color, su forma, el material de que están hechos, el número de elementos de los conjuntos… El niño comienza así a aislar las propiedades tanto de los objetos como de los conjuntos. Las clasificaciones que realiza son simples (formando grupos).

A esta edad se realizan también actividades de seriación, concretamente las que conciernen a la comparación de cantidades de una magnitud continua (más pequeño que, más grande que) o de cantidades de una magnitud discreta (más que, menos que), y actividades de reconocimiento de un ritmo, una regularidad en una sucesión lineal o la continuación de ella, así como trabajo con las formas, con las magnitudes (por ejemplo alternancia corto-largo) o con cantidades pequeñas (por ejemplo alternancia un-dos-tres). Se pueden aprovechar estas actividades para plantear otras muy relacionadas con ellas. Por ejemplo, en una clasificación u ordenación ya efectuadas, brindarles la oportunidad de detectar un intruso o de identificar un elemento ausente en ellas.

Los juegos de reglas son apropiados para trabajar tanto la clasificación como la ordenación, aunque hay que ser conscientes de que los niños de esta edad son a menudo poco cuidadosos respecto a las reglas y a veces escogen orientar su acción en otra dirección.

Para niños de 4 a 5 años, las actividades de comparación, clasificación y seriación son muy utilizadas en distintas situaciones generales y también en lo que respecta al número, la medida y organización del espacio. Las actividades deben plantear una pregunta o una inquietud que suscite el interés de los alumnos (reagrupar objetos con vistas a una nueva utilización, repartir objetos entre los niños, encontrar el objeto desconocido, ausente o intruso). Las clasificaciones que se realicen deben ser simples, en las que se emplee un único criterio; las que utilicen dos o más criterios se reservarán para niveles posteriores.

Durante la realización de las actividades, a los niños hay que enfrentarlos a la necesidad de codificar un objeto, una propiedad, un emplazamiento, un desplazamiento... para recordarlos o para comunicarlos a otros. Estos códigos les permiten introducirse en el mundo de la simbolización, utilizada en matemáticas y otros dominios de conocimiento.

La realización de patrones algo más complejos, completar series respetando la regularidad, descubrir elementos que faltan en una sucesión o la percepción de las reglas del juego son actividades que conducen al niño a tomar conciencia de la necesidad de respetar las reglas, verbalizarlas e iniciarse en su elaboración.

A esta edad el niño empieza a desarrollar su capacidad de anticipación, con la que prevé el resultado de una acción, y de deducción, sacando consecuencias de sus asunciones anteriores y modificándolas si no son pertinentes. También tiene posibilidad de abordar el pensamiento inductivo, por ejemplo, en la continuación de una serie siguiendo un patrón.

En el último curso de infantil (niños con 5 años de edad), las actividades de comparación, clasificación y ordenación conciernen a los distintos contenidos: magnitudes, cantidades, formas, organización del espacio y del tiempo. La complejidad de los problemas es mayor y a veces intervienen dos criterios: comparación de los objetos según dos atributos utilizados simultáneamente y clasificación de objetos o conjuntos teniendo en cuenta dos propiedades que puede desembocar en una organización del tipo tabla de doble entrada.

Los símbolos utilizados para representar un objeto, codificar una propiedad o designar un desplazamiento son más abstractos que en los cursos anteriores. A los alumnos se les proponen situaciones para que realicen actividades de lectura, de interpretación y de producción de tales símbolos. Pueden responder a propuestas de reconocimiento y producción de ritmos repetitivos y evolutivos, así como a patrones de repetición y de crecimiento, en los que hay que emplear o interviene el pensamiento inductivo.

7.1. Recomendaciones para la enseñanza

La práctica con juegos de retratos, de alineamiento, de memoria... potencia el desarrollo de capacidades que permiten deducir, elaborar una estrategia y adaptarla sobre la marcha en función de las respuestas dadas.

En los problemas que se les propongan a los niños deben plantearse situaciones en las que tengan que realizar ensayos y reajustes en función del resultado obtenido. Se fomenta así la capacidad de aplicar una estrategia de ensayo y error a la resolución de problemas. La tabla 4.4 presenta una secuenciación de actividades en la enseñanza según la edad de los niños.

TABLA 4.4

Programa para desarrollo del pensamiento lógico en infantil de 3 a 6 años

Edad: 3-4 años	**Edad: 4-5 años**	**Edad: 5-6 años**
• Clasificar objetos en función de: color, forma, materia, tamaño, cardinal (para conjuntos de objetos). • Identificar propiedades de objetos o colecciones. • Realizar clasificaciones simples (formar paquetes). • Detectar un intruso o identificar un elemento ausente. • Usar algunos criterios de seriación: tamaño (más pequeño que, más grande que), numerosidad (más que, menos que). • Reconocer regularidad en una serie, continuar una serie según el atributo: forma, color, tamaño, cantidades pequeñas de objetos.	• Comparar, clasificar y seriar de modo que se formule una pregunta final que trata de: reagrupar, repartir, encontrar objetos omitidos o «intrusos». • Codificar objetos, propiedades, emplazamientos. • Identificar patrones o regularidades más complejos. • Localizar elementos que faltan en una serie. • Iniciarse en la anticipación y la deducción (prever los resultados de una acción, obtener un resultado, corregir para el siguiente ensayo). • Iniciarse en el pensamiento inductivo (completar una serie, continuar un patrón).	• Comparar, clasificar y seriar cantidades y formas, organizar el espacio y el tiempo, realizar tablas de doble entrada. • Leer, interpretar y producir símbolos. • Reconocer ritmos repetitivos y evolutivos. • Reconocer patrones repetitivos y de crecimiento. • Practicar juegos de deducción. • Elaborar estrategias de ensayo y error.

Uso del lenguaje de la lógica en infantil

Como sucede en otras áreas de la matemática, algunos términos propios de la lógica se usan en el lenguaje habitual y en ocasiones su significado difiere del que tienen en el lenguaje de la lógica. Por ejemplo, si un niño dice: «todos mis amigos tienen cromos», puede que esté pensando que sus amigos Lola y Miguel tienen cromos, pero no conoce si algún otro amigo tiene o no tiene cromos. Esta frase en la que se usa la expresión «todos» cuando en realidad se trata de «algunos», coloquialmente hablando se considera correcta, pero no lo es para la lógica formal. La expresión «todos», según la lógica, comprende la totalidad de los elementos de la colección considerada, sin exclusión de objeto alguno. Análoga reflexión podemos hacer sobre el uso de «ninguno» por «alguno».

Los expertos recomiendan trabajar con las expresiones del lenguaje de la lógica y utilizarlas adecuadamente en el aula para que lleguen a ser familiares al niño en su forma correcta.

Las tareas pueden estar centradas en:

- Presentar enunciados en contextos simples en los que el niño ha de atribuirles un valor de verdad.
- Hacer uso de conexiones elementales y habituales: partículas «y», «o», «no».
- Seleccionar objetos atendiendo a uno o más atributos dados.
- Introducir en el vocabulario del niño, usándolas de forma adecuada, palabras que en idioma natural tienen la función de cuantificadores: «todos», «ninguno», «cualquiera», «no todos», «uno solo»…
- Introducirle, igualmente, en las ideas y el lenguaje base de la combinatoria y en la terminología probabilística. Usar de manera significativa y coherente las expresiones «quizá», «es posible», «es seguro», «es imposible», «es más probable».
- Iniciar al niño en la capacidad de expresar acciones del ámbito matemático, como de-

finiciones o reglas. Por ejemplo, en situaciones lúdicas, describir oralmente las reglas de un juego es un ejemplo de actividad de este tipo.

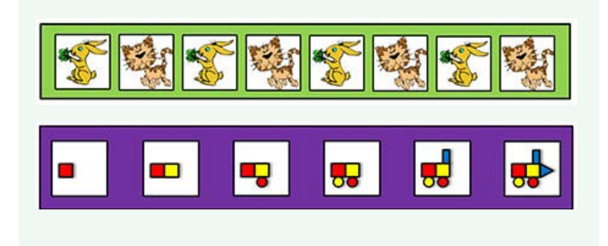
- Iniciarles, asimismo, en la conciencia de las ideas de causalidad y de tiempo. Así, organizar secuencias de orden temporal o relacionar un hecho, o situación, como causa de otro.

8. EJERCITA TU APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1: Canta la canción «En la granja de Pepito». Identifica y describe el patrón implícito en esta canción. Enuncia una regla que sigue el patrón. Indica qué tipo de patrón es. Representa con letras el patrón.

ACTIVIDAD 2: Estudia algunas otras canciones infantiles en las que haya implícito un patrón. Señala dos de ellas. Compara el patrón implícito en las canciones que has señalado con el de la canción de la granja de Pepito y analiza si se trata del mismo o diferente patrón.

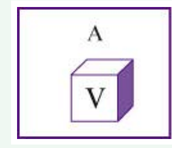
ACTIVIDAD 3: Analiza los dos frisos siguientes. Identifica si se han formado siguiendo un patrón. Indica el tipo de patrón en cada caso (si lo hay). Diseña una tarea a realizar por niños de 4-5 años utilizando estos frisos.

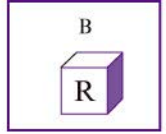


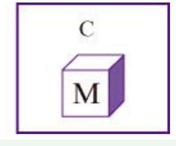
ACTIVIDAD 4: Analiza la siguiente actividad, resuélvela y razona si es adecuada para niños de algún nivel de infantil.

Ester, Marina y Beatriz tienen una caja cada una en la que guardan sus cosas.

a) Colorea las tres cajas. La caja V, de color verde. La caja R, de color rojo. La caja M, de color marrón.







b) Descubre cuál es la caja de cada niña si ocurre que:

1. La caja de Ester no es verde.
2. La caja de Marina está en medio.

Pista que puede ayudar a llegar a la solución:

Marcar sobre una tabla las diferetes posibilidades. Coloca en una tabla la solución:

	A	B	C
Ester			
Marina			
Beatriz			

	Caja
Ester	
Marina	
Beatriz	

ACTIVIDAD 5: Propón una tarea para que niños de 4-5 años recojan datos, los organicen y los representen en un gráfico de frecuencias.

5 Espacio y geometría

JUAN FRANCISCO RUIZ
JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ

Profesor: *Jaime, ¿me puedes decir cuántos cubos hay en esta figura?*
Jaime: *¡Uf! Es muy difícil.*
Profesor: *¿Por qué?*
Jaime: *Porque no se ven los que hay detrás.*

(Jaime, 7 años)

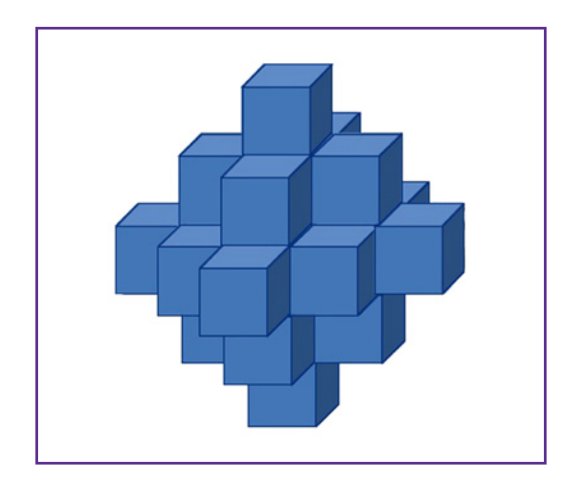


Figura 5.1.—Objeto tridimensional.

Describir los objetos que rodean a las personas forma parte del conocimiento del entorno. Reconocer sus cualidades (atributos o características) para identificar similitudes y diferencias permite clasificarlos (capítulo 3) y, en muchos casos, determinar nombres comunes para ellos. Algunas de estas cualidades son propias de las matemáticas. Palabras como punto, recta o ángulo, que ya forman parte del vocabulario cotidiano, nacieron como ideales que permiten hablar y describir objetos reales. Estas nociones con las que describir objetos de la realidad se convirtieron a su vez en materia de estudio de los matemáticos, generando así un área de conocimiento propia, la geometría.

La geometría es una rama de las matemáticas cuya finalidad es estudiar las características, propie-

dades y relaciones de las figuras del plano y el espacio. Entre sus funciones está describir la forma de los objetos y sus principales elementos geométricos, lo que permite identificar aquellos que tienen forma similar.

La geometría se basa en la observación de objetos reales. Sin embargo, esta observación es, en muchos casos, incompleta. Por ejemplo, al mirar un edificio, sólo se ve una parte de él. La descripción se puede realizar con la información que se posee, de la parte que se ve. Así, cuando se mira un balón lo suficientemente lejos, lo que se ve es una figura redonda, y, de hecho, se suele describir como «un balón es redondo». Pero también se puede recurrir a habilidades de visualización que permitirán describir las partes que no se ven, basándose en propiedades geométricas como la simetría. El balón entonces recibe un adjetivo más adecuado: esférico.

Sin embargo, ningún objeto real es perfecto ni se ajusta a los ideales geométricos. El balón al que aludíamos anteriormente tiene forma esférica pero no es una esfera. Una esfera es un concepto (objeto mental) que describe los puntos del espacio que equidistan de su centro, pero ningún objeto real dispone de dicha perfección. Esto no significa que la geometría no sirva para describir la realidad, sino todo lo contrario. La geometría ofrece una gran variedad de conceptos «perfectos» repletos de buenas propiedades de los que hay que seleccionar los más adecuados para conseguir descripciones completas.

Cuantos más conceptos geométricos se conozcan, mejor se puede realizar la descripción de un objeto real. Además, nos brinda un marco interpretativo y un lenguaje que nos permiten compartir datos e información que solemos emplear en nuestras conversaciones.

ACTIVIDAD 1: Describe una conversación que recuerdes haber tenido en la que hayas hecho referencia a objetos, propiedades o relaciones geométricas.

La percepción de los objetos se realiza a través de los sentidos, y para su descripción se recurre a atributos sensoriales (capítulo 3). De todas las cualidades sensoriales, la geometría se ocupa de la forma, la posición y la medida de los objetos. Cuando se estudian propiedades de la forma y la posición relativas a continuidad, ruptura, abertura, vecindad..., se habla de topología (capítulo 6).

Este capítulo se centra en las nociones geométricas de posición y forma. La primera parte recoge la manera de indicar la posición que ocupan los objetos y las personas. La segunda explica en qué consiste la percepción espacial de los objetos del mundo real y de qué habilidades se compone. La tercera parte se centra en la descripción de la forma, en sus elementos geométricos y en algunas posibilidades de identificar semejanzas y diferencias a través de la elección de criterios de clasificación de dichos objetos geométricos. Para terminar, se introducen algunas actividades prácticas de geometría, la mayoría de ellas relacionadas con la belleza y el arte.

1. ORIENTACIÓN Y LOCALIZACIÓN. SITUÁNDOSE EN EL MUNDO

Una persona debe formarse una imagen ajustada y positiva de sí misma a través de la interacción con los otros y de la identificación gradual de las propias características. Asimismo debe conocer y ser capaz de representar su cuerpo, sus elementos y algunas de sus funciones. Eso le permitirá descubrir posibilidades, modos de acción y de expresión y limitaciones y controlar coordinadamente gestos y movimientos cada vez con mayor precisión.

La orientación tiene que ver con la capacidad del ser humano para ubicarse en el espacio que le rodea, así como para identificar y describir localizaciones y posiciones de objetos. Palabras tan comunes como «delante», «detrás», «encima de», «debajo de» o «a la izquierda» forman parte del vocabulario cotidiano que sirve para orientarse.

1.1. El cuerpo

El elemento básico de orientación es el propio cuerpo. El cuerpo está constituido por elementos que permiten a las personas hablar de otros objetos externos con respecto a sí mismos: «lo tengo justo delante», «está a mi izquierda»

Estas referencias personales se denominan «ejes corporales». Estos ejes son líneas imaginarias que atraviesan nuestro cuerpo (figura 5.2):

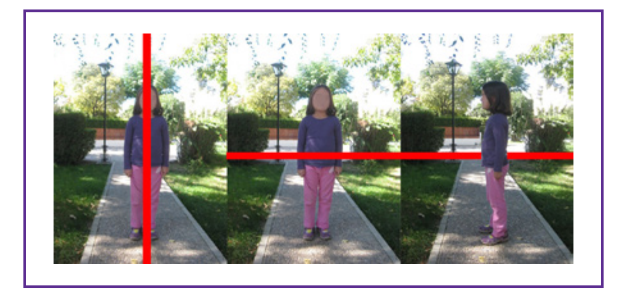


Figura 5.2.—De izquierda a derecha, representación de los ejes vertical, horizontal y longitudinal.

- Cuando consideramos la columna vertebral una línea recta, se habla de eje vertical. Este eje permite diferenciar lo vertical de lo inclinado. El vocabulario asociado a este eje incluye términos equivalentes a «arriba» y «abajo».
- Cuando consideramos un eje que atraviesa las caderas de izquierda a derecha o viceversa, se habla de eje horizontal. Algunas de las expresiones que identifican este eje son «a la izquierda» o «a la derecha».
- El cuerpo humano tiene parte de delante y parte de atrás, luego se puede considerar una línea que va de atrás adelante, o viceversa, denominada «eje longitudinal». Los términos «delante» o «detrás» son característicos de este eje.

Ejemplos de expresiones que se refieren a los ejes corporales son: «estoy de pie», «estoy tumbado», «voy hacia delante» o «estoy a su derecha».

Actividad 1: Escribe dos frases en las que se use vocabulario referente al eje vertical. Haz lo mismo para cada uno de los otros ejes.

Actividad 2: En algunos libros, en lugar de considerar ejes corporales, se habla de planos corporales. Busca información sobre los planos corporales y relaciónalos con los ejes corporales.

1.2. Posición de objetos en el espacio. Objetos orientados

Indicar la posición que ocupan los objetos del entorno requiere un referente, algo respecto a lo que indicar la posición. El referente debe ser algo conocido, ubicado y que no produzca confusión.

Actividad 3: Mira hacia delante. Elige un objeto. Indica su posición. ¿Con respecto a qué lo has posicionado? ¿Puedes indicar la posición del objeto elegido de otra manera diferente?

El referente puede ser la persona que está hablando, que es el caso más elemental. La persona que describe expresa la localización de un objeto respecto a sí misma: «este coche está delante de mí», «voy hacia atrás», «el suelo está debajo de mí»... En estos casos, la posición se expresa respecto a los ejes corporales de la persona que está hablando.

El referente también puede ser un objeto externo a la persona que está hablando. En estos casos, es de gran importancia saber si el referente es un objeto orientado, es decir, si tiene algún tipo de cualidad que permita determinar posiciones respecto a él.

Estar orientado no suele considerar la orientación que proporciona la fuerza de la gravedad. Por su posición en la tierra, todos los objetos tienen parte de abajo (la más cercana al centro de la tierra) y parte de arriba (la más lejana al centro de la tierra). Sin embargo, se puede utilizar esta referencia.

En general, los objetos con movimiento son orientados, como los coches o los animales. Por



Figura 5.3.—Objetos orientados y no orientados.

ejemplo, en las imágenes de la figura 5.3 se observan cuatro objetos. Todos tienen parte de arriba y parte de abajo. Además, el coche, por poseer movilidad, tiene parte delantera y trasera y, consecuentemente, parte izquierda y derecha. El coche es un objeto orientado. Ni la mesa, ni el limón ni el cubo de basura se pueden considerar objetos orientados porque no poseen ningún elemento que permita destacar una parte con respecto a otra.

Actividad 4: Haz una lista con cinco objetos que tengas en tu casa. Determina si son orientados o no y justifica tus argumentos.

Cuando se localiza un objeto con respecto a otro objeto no orientado, es necesario incluir elementos que orienten la posición del objeto («a la izquierda de», «delante de»...). Para ello se utiliza la orientación de la persona que describe la posición. Por ejemplo, en la figura 5.4, el pájaro de cerámica está a la izquierda del tetrabrik de leche. El pájaro es el objeto que se quiere ubicar y el tetrabrik de leche es la referencia, pero, como no tiene orientación, se utiliza la orientación desde la que se está mirando.



Figura 5.4.—Posiciones relativas de dos objetos.

En caso de que la referencia sea un objeto orientado, existen dos posibilidades:

- Que se utilicen como elementos de orientación los del objeto de referencia.
- Que se utilicen como elementos de orientación los del observador.

Por ejemplo, supongamos que queremos dar la posición del oso de peluche según la imagen de la figura 5.5.



Figura 5.5.—Posiciones de varios objetos.

Esta posición se puede expresar de dos formas usando al vaquero:

a) Si el vaquero se considera un objeto orientado, se podría decir que el oso de peluche está a la derecha del vaquero.
b) Si se considera como orientación la del observador, el oso de peluche está a la izquierda del vaquero.

Actividad 5: Usa otros elementos de la imagen anterior para describir la posición del peluche.

Actividad 6: Haz un esbozo de cómo se verían los objetos de la mesa si el observador se situara en el monitor de ordenador que hay al fondo. Estudia cómo cambiaría en este caso la posición del peluche con respecto al vaquero si se considera la orientación de este observador.

Actividad 7: Cuando estés leyendo esto, describe la posición de tus manos con respecto a un objeto que puedas ver desde tu posición sin moverte.

1.3. Dirección y sentido. Ubicación en caminos

Otro tipo de localización es posible cuando los objetos se encuentran en un lugar determinado: caminos, superficies o en el espacio.

El caso más sencillo es el de los caminos. Cuando un objeto se encuentra en una trayectoria conocida, en una línea determinada, basta usar como referencia dicha trayectoria, una distancia y un sentido para determinar su posición.

Por ejemplo, la línea férrea del AVE que une Madrid con Sevilla es una trayectoria que podría plasmarse con una línea, no necesariamente recta (figura 5.6). Para indicar la posición de uno de los trenes que circula, hay que decir que está en ese trayecto, hacia dónde va (sentido) y la distancia desde el punto de partida o la distancia hasta el punto de llegada. Un ejemplo es «estoy en el AVE. Voy camino de Madrid, a medio camino».



Figura 5.6.—Trayecto de la línea Sevilla-Madrid del AVE.

Toda dirección tiene dos sentidos. Es lo que ocurre en las escaleras mecánicas. Siempre están de dos en dos, ambas en la misma dirección marcando dos sentidos diferentes: uno para subir y otro para bajar (figura 5.7, izquierda). Una calle se puede recorrer en orden creciente de números o en orden decreciente. Esto determina los dos sentidos de una calle. Las normas de tráfico también incluyen una señal que indica cuándo cambiar de sentido sin cambiar de dirección (figura 5.7, derecha). Sin embargo, cambiar de carretera supondría un cambio de dirección.

En el caso de las carreteras, una dirección está determinada por dos ciudades, o por el nombre de la carretera. Los sentidos se manifiestan cuando se indica la ciudad de partida y la de llegada. De hecho, si se tiene un percance en una autovía y se llama a la grúa, es necesario indicar el nombre de la carretera (o las dos ciudades que une), el punto kilométrico en el que se está y el sentido en el que se va. Por ejemplo, estoy en la autovía A-44 (o bien Bailén-Motril o bien autovía de Sierra Nevada-Costa Tropical), en el punto kilométrico 73 en sentido Motril. Por tanto, para localizar un objeto que se mueve en una dirección, bastará determinar dos cosas: la distancia a la que está de la referencia y el sentido.

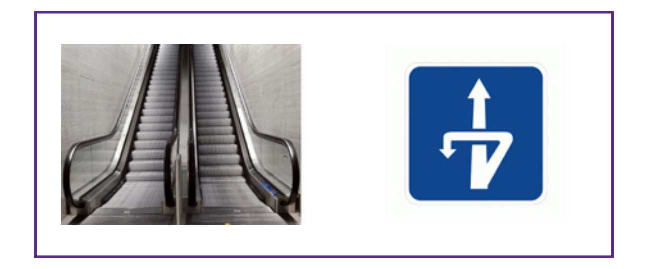
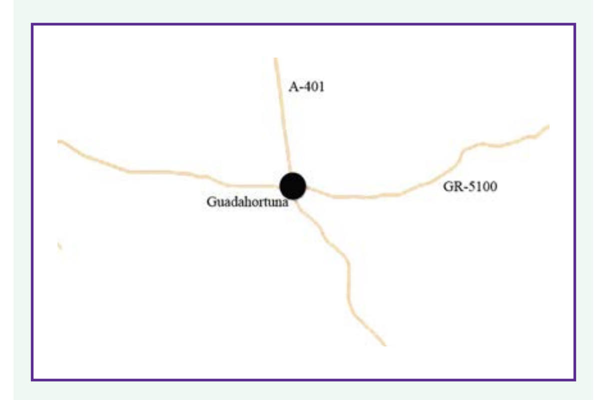


Figura 5.7.—Una misma dirección con dos sentidos posibles.

Actividad 8: Jaime y Paula están en una carretera que pasa por Guadahortuna. Paula se encuentra a 5 km del pueblo y Jaime a 5 km de Paula:



a) ¿A qué distancia está Jaime de Guadahortuna?
b) Analiza si la información del enunciado es suficiente. Razona tu respuesta.
c) Describe la situación si Jaime estuviese a 12 km de Guadahortuna.
d) Encuentra otra posición en la que podría estar Jaime según el enunciado.

1.4. Localización en superficies y en el espacio

Cuando los objetos no se pueden situar en una dirección concreta porque su movimiento es libre sobre una superficie (piensa en los barcos cuando

están en el mar), se necesitan otras formas de localizarlos. Se recurre entonces a métodos que combinan dos direcciones, como las cuadrículas u otros sistemas que partiendo de un origen o referencia permiten determinar la posición. Ése es el fundamento de, por ejemplo, el juego de los barquitos.

Una de las formas clásicas de localizar objetos es usando los puntos cardinales: norte-sur determinan una dirección, y este-oeste, otra. Mediante la combinación de ambas direcciones y un punto inicial de referencia, se puede determinar la posición de cualquier objeto sobre la superficie de la tierra. Concretamente, estas direcciones se llaman latitud (dirección norte-sur) y longitud (dirección este-oeste), y el punto de referencia es la intersección del meridiano de Greenwich y la línea ecuatorial (figura 5.8). En este sistema de localización, las medidas de latitud y longitud se expresan en grados, minutos y segundos.

Más recientemente se ha desarrollado el sistema de posicionamiento global (GPS), que proporciona las coordenadas geográficas de cualquier punto por triangulación de satélites, y su uso se ha convertido en algo cotidiano en teléfonos móviles, tabletas y otros dispositivos.

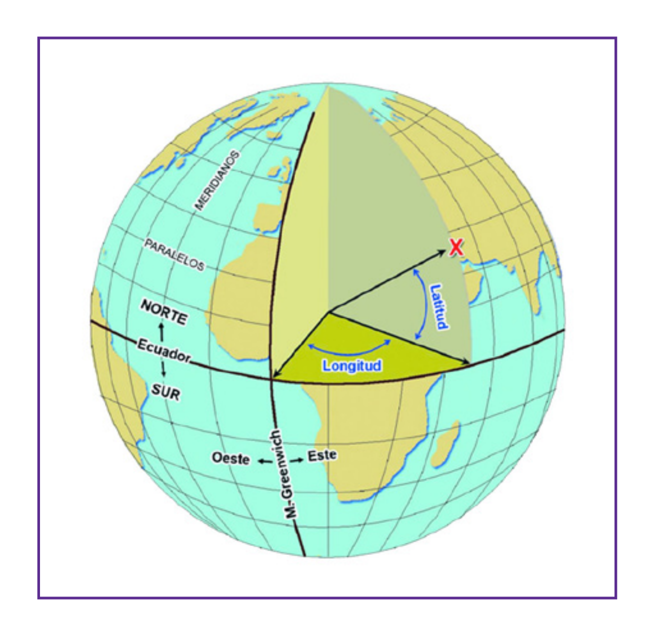


Figura 5.8.—Localización de puntos en la esfera terrestre.

El nivel de localización más complejo es el que requiere situar tres variables: objetos que además de situarse libremente sobre un plano pueden moverse hacia arriba o hacia abajo. Los aviones, las naves espaciales o los submarinos son ejemplos de objetos que necesitan sistemas de localización más complejos.

Actividad 9: Explica cómo puede usarse una cuadrícula para describir los posibles caminos que hay de un sitio a otro.

Actividad 10: Investiga usando Internet el sistema que se emplea para describir la posición que ocupa un avión cuando está volando.

1.5. Proporcionalidad en las distancias

Los sistemas coordenados para localización en superficies permiten la creación de mapas, planos y croquis. Estas formas de representación de las superficies facilitan a los seres humanos determinar posiciones de objetos mediante dibujos en los que se mezclan las referencias, la orientación de objetos y la proporción de las distancias. En educación infantil la elaboración de mapas y planos es una actividad muy acertada para desarrollar en los escolares habilidades relacionadas con la orientación.

La proporción es la relación o razón constante entre magnitudes medibles. En geometría, la proporción se debe establecer entre las direcciones que determinan dimensiones diferentes. Se utiliza para hacer mapas, en arte para hacer réplicas de esculturas y edificios o para diseñar puzles, entre otras finalidades. Para estudiar la proporción, las figuras deben tener, al menos, dos dimensiones. Un ejemplo de proporción geométrica es el escalado de fotografías cuando se utilizan en las redes sociales. En la figura 5.9, la foto grande es del busto del matemático griego Tales de Mileto. Las fotos pequeñas son copias de la grande a las que se les ha modificado el tamaño. Una de ellas es proporcional a la grande porque tanto el ancho como el alto de

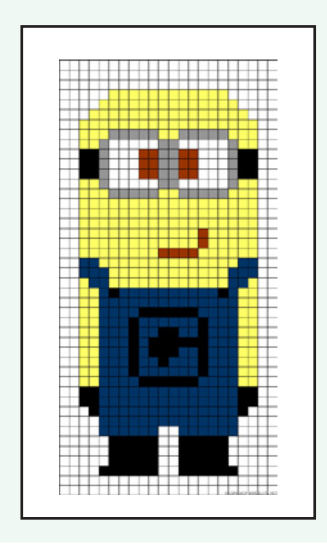


Figura 5.9.—Imagen proporcional y no proporcional a la inicial.

la imagen se han reducido proporcionalmente. La otra no es proporcional a la grande puesto que las relaciones entre las proporciones de los anchos y los altos no coinciden.

ACTIVIDAD 11: Elabora un mapa de la primera planta del edificio principal de tu facultad, procurando que las distancias entre los puntos principales sean aproximadamente proporcionales. Señala cuál es la distancia más grande que se puede recorrer entre dos puntos sin dar rodeos.

ACTIVIDAD 12: Realiza un duplicado del dibujo, doble de grande que el original, usando una cuadrícula.



1.6. Elementos topológicos de la orientación y la localización

Un caso particular de estudio de los objetos y sus posiciones aparece cuando no existe interés por las distancias que los separan. Así, por ejemplo, cuando se viaja en metro, no es tan importante la distancia entre la estación donde se toma y la estación en la que hay que bajarse como el número de estaciones intermedias. Éste es un caso de estudio de grafos, una parte de la matemática llamada topología. La topología está dedicada al estudio de las propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas.

ACTIVIDAD 13: Busca la razón por la que una taza de café es exactamente igual que una rosquilla, para la topología.

Un grafo es una construcción a base de puntos (vértices) y curvas simples (aristas) que los unen, de forma que cada arista une sólo dos vértices y no es posible que haya aristas aisladas. En la actualidad, los grafos se usan en multitud de campos: representaciones de mapas de metro, cálculo de distancias mínimas en redes de carreteras, organización de redes de tren, venta de billetes con escala de una compañía aérea, recuperación de árboles filogenéticos, diseño de redes eléctricas...

Para construir un grafo, las matemáticas se abstraen del significado de los elementos que aparecen en ellos y tratan de poner de manifiesto de manera más fácil las relaciones entre los distintos vértices. Por ejemplo, en la figura 5.10 las imágenes muestran dos representaciones de la línea 1 del metro de Granada. En la primera imagen aparece un tramo sobre un plano de la ciudad, el cual proporciona información sobre distancias entre paradas y direcciones de la línea. En la segunda imagen, de carácter topológico, se muestra un grafo de la línea completa, el cual da información sobre el número de paradas sin importar las distancias entre ellas ni los cambios de dirección de la línea.

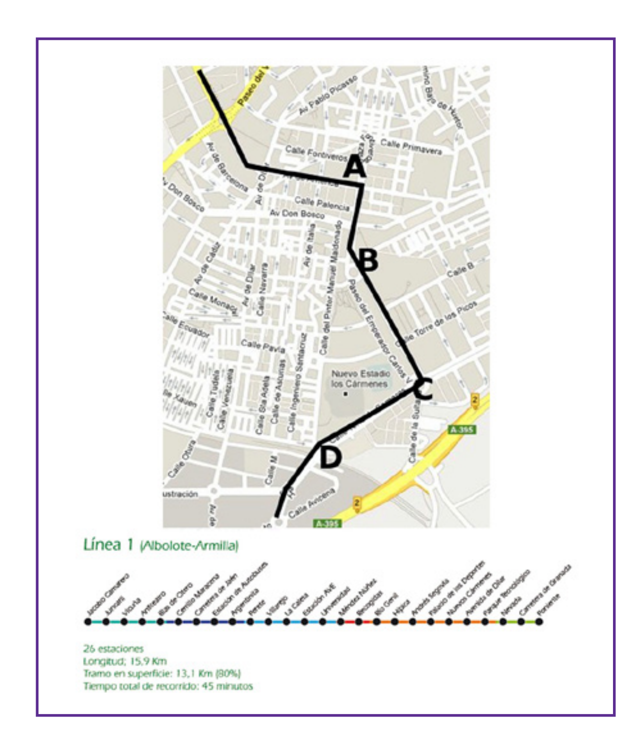
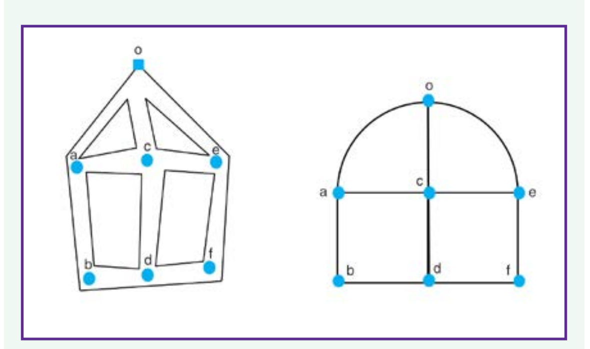


Figura 5.10.—Dos representaciones de una misma línea de metro.

ACTIVIDAD 14: Un cartero debe repartir la correspondencia a cada una de las manzanas de casas de su distrito siendo la oficina de correos su punto de partida y fin. El mapa aparece en la figura de la izquierda. La imagen de la derecha es una representación topológica de ese mapa, donde las líneas representan las calles y los puntos las intersecciones entre ellas. Encuentra una ruta óptima en la que la distancia total recorrida sea la mínima posible.



1.7. Materiales para trabajar la orientación y la localización

Para fomentar en los escolares el desarrollo de sus capacidades de orientación y localización, toma especial relevancia el contexto físico del aula, del centro y del entorno más próximo. Los niños conocen esos espacios y pueden así disponer de referentes próximos con los que relacionarse e interactuar. De hecho, es frecuente que estos escolares elaboren planos, mapas e incluso maquetas de su clase o de su centro. Para este tipo de actividades se suelen emplear materiales de manualidades sencillos y de fácil adquisición: cartulina, goma EVA o plastilina son algunos ejemplos.

Algunos recursos informáticos también se pueden emplear para elaborar mapas y planos, como por ejemplo GeoGebra. Aunque suelen usarse para matemáticas más avanzadas, los profesores pueden emplearlos para diseñar cómodamente cuadrículas y caminos para proponer después a los escolares tareas de elaboración de senderos óptimos, de descubrimiento de todas las rutas posibles, de estimación de distancias, etc.

2. VISUALIZACIÓN. CÓMO SE VEN LOS OBJETOS

La descripción de la realidad requiere la percepción a través de los sentidos, la asimilación de determinados elementos característicos y el desarrollo de ciertas habilidades. El conjunto de las habilidades relacionadas con la percepción visual y la forma en que el cerebro las asimila se denominan visualización geométrica.

La visualización tiene que ver con las habilidades necesarias para observar, interpretar, analizar y comunicar información visual sobre objetos reales o nociones geométricas.

La visualización implica ser capaz de generar imágenes mentales de formas y figuras viéndolas desde distintas perspectivas. Las habilidades que se ejemplifican aquí y que tienen especial relevancia en educación infantil son la identificación visual, la conservación de la percepción, la percepción de las relaciones espaciales y la discriminación visual.

2.1. Identificación visual

La identificación visual es la habilidad para reconocer figuras matemáticas (geométricas) en composiciones complejas o en composiciones incompletas. Es una habilidad que se usa para identificar cuerpos geométricos espaciales o para figuras geométricas planas.

Un ejemplo sencillo es determinar el número de cuadrados que hay en una figura como la siguiente.

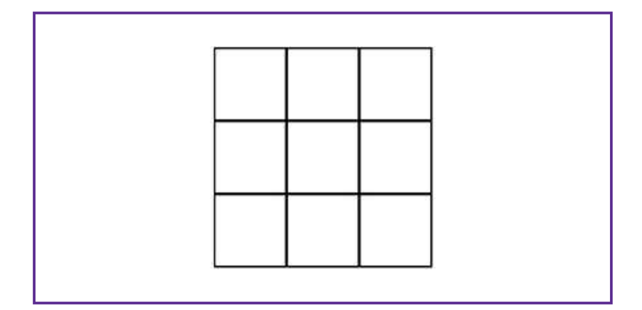


Figura 5.11.—¿Cuántos cuadrados hay?

Una estrategia posible puede ser ir identificando cuadrados por su tamaño. Del tamaño más pequeño, o cuadrados simples, hay nueve. Si se consideran los cuadrados formados por cuatro cuadrados simples, se pueden identificar cuatro, y de los formados por nueve cuadrados simples hay uno (figura 5.12). En total, pueden identificarse 14 cuadrados, de tres tamaños diferentes.

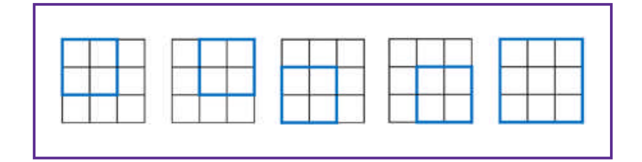


Figura 5.12.—Estrategia para el conteo de los cuadrados.

Un ejemplo más complejo es la búsqueda y la identificación de determinadas figuras geométricas en paisajes compuestos o la determinación de la posición de los elementos de una obra de arte (figura 5.13).

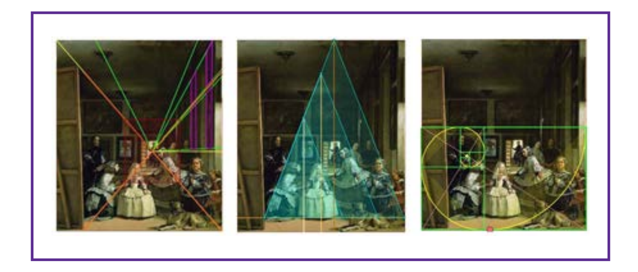
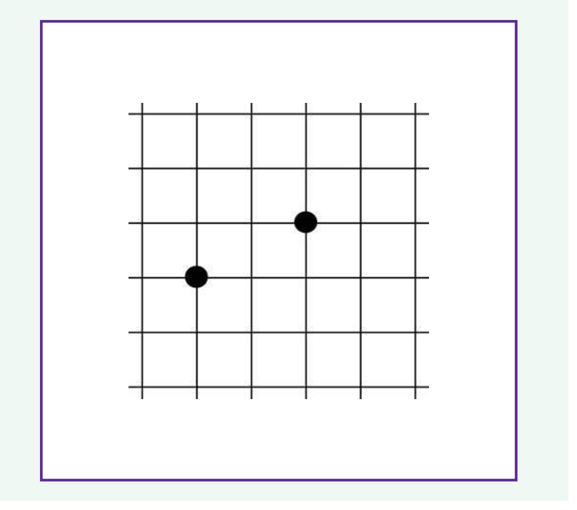


Figura 5.13.—Identificación de formas geométricas en *Las Meninas* de Velázquez.

ACTIVIDAD 1: La figura muestra dos vértices consecutivos de un cuadrado. Dibuja el cuadrado. Estudia si existe más de una posibilidad.



2.2. Conservación de la percepción

La conservación de la percepción es la habilidad para extraer información de figuras que no se pueden ver en su totalidad, normalmente porque hay una parte oculta. Es una habilidad que se ejercita cuando se trabaja con cuerpos espaciales.

Un ejemplo es la determinación del número de cubos que forman un cuerpo geométrico (como el de la figura 5.1 de este capítulo). Una posible estrategia para encontrar ese número consiste en separar

la figura por niveles. En el nivel más alto (figura 5.1) hay un solo cubo. En el segundo nivel hay cinco, en el tercero, 13, y los dos niveles inferiores son similares a los dos superiores. Por tanto, la figura contiene 25 cubos (figura 5.14).

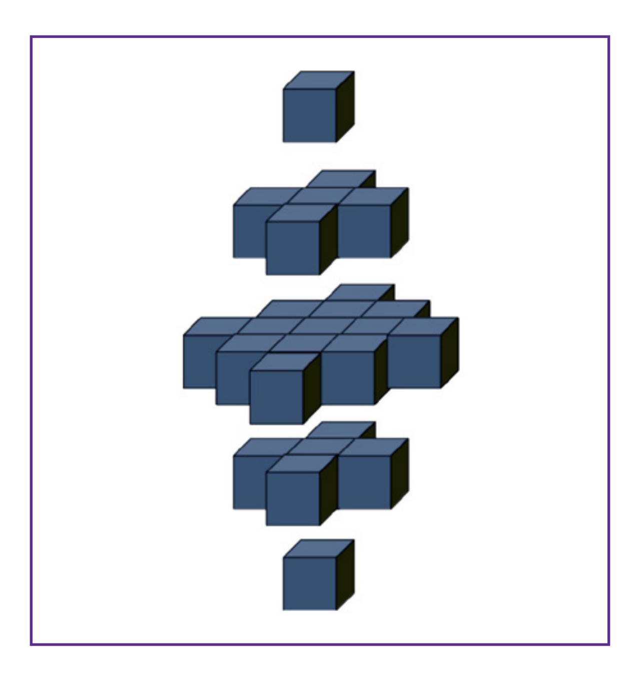
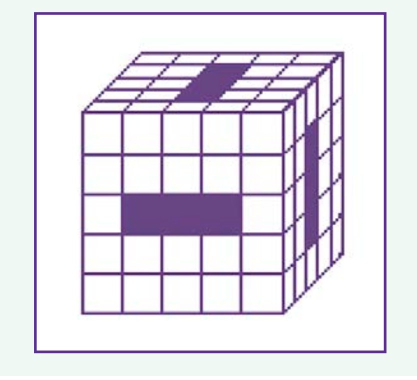


Figura 5.14.—Descomposición en niveles de la figura 5.1.

ACTIVIDAD 2: Se hacen túneles que atraviesan de lado a lado un cubo grande, como se indica en la figura siguiente. Determina el número de cubos pequeños que han quedado.



2.3. Discriminación visual

La discriminación visual es la habilidad que permite comparar y diferenciar varios objetos de acuerdo con sus semejanzas y diferencias. Esta habilidad se aplica tanto a figuras planas como a cuerpos espaciales.

Por ejemplo, determinar que los dos cuerpos geométricos de la figura 5.15 son diferentes requiere poner en marcha esta habilidad. En ocasiones, es necesaria la construcción de modelos reales para percibir las igualdades o diferencias.

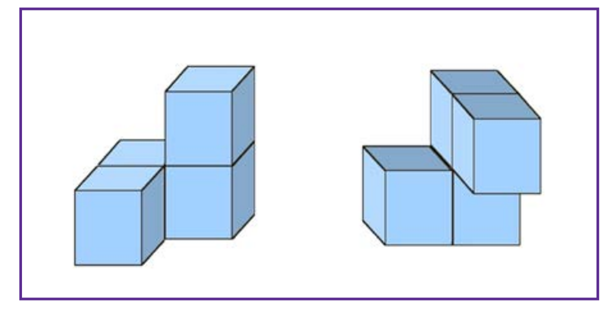
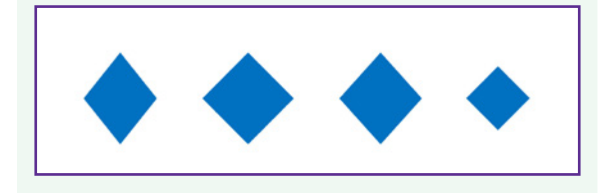


Figura 5.15.—¿Son la misma figura?

ACTIVIDAD 3: Identifica los cuadrados en la siguiente colección de figuras, si es que los hay. Explica en qué basas tu respuesta.



2.4. Percepción de relaciones espaciales

La percepción de relaciones espaciales es la habilidad para identificar características y propiedades básicas de un objeto espacial. Tiene que ver con la forma en la que el ojo humano percibe la imagen, como si la estuviese viendo en una fotografía o en un cuadro.

La reproducción de objetos sobre papel, en lienzo o en la pantalla de un ordenador utiliza diferentes técnicas para representar las figuras reales. Las formas más usuales son las proyecciones, y son de tres tipos principalmente: proyección isométrica, proyección paralela y proyección ortogonal.

La proyección isométrica o perspectiva 3/4 es de las más comunes y utiliza una trama de puntos formada por triángulos (figura 5.16).

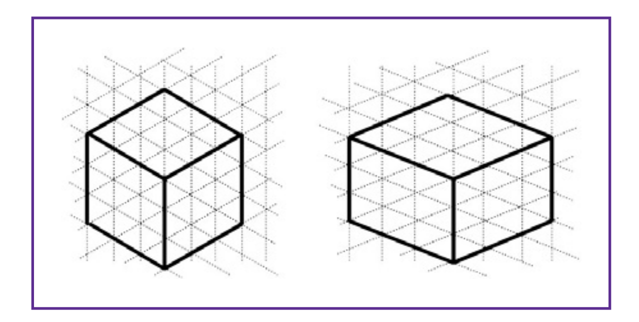


Figura 5.16.—Ejemplo de proyección isométrica de dos figuras.

La proyección paralela ortogonal representa la imagen como si ésta se estuviese reflejando sobre un espejo (figura 5.17).

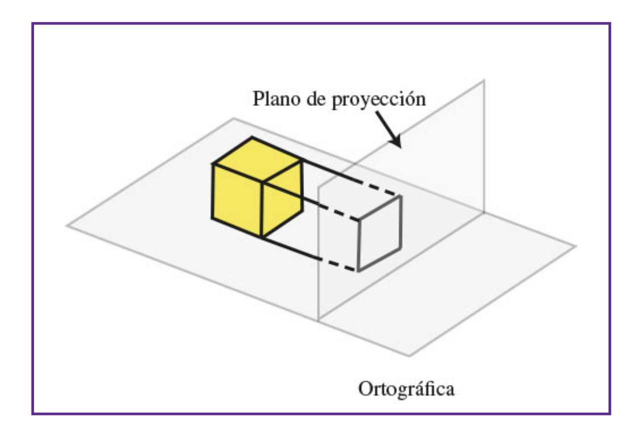


Figura 5.17.—Ejemplo de proyección paralela ortogonal de una figura.

La proyección ortogonal permite realizar tres representaciones planas de una figura, cada una de las cuales está tomada desde una posición diferente. La planta es la vista de la figura desde arriba o abajo; el alzado es la vista desde el frente, y el perfil, la vista desde uno de los laterales (figura 5.18).

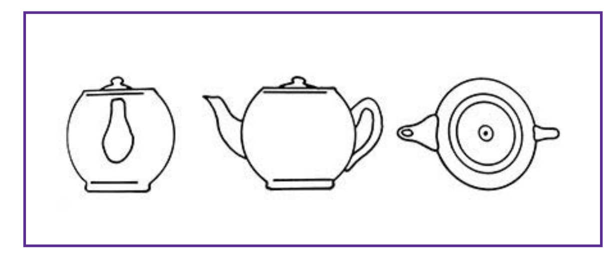
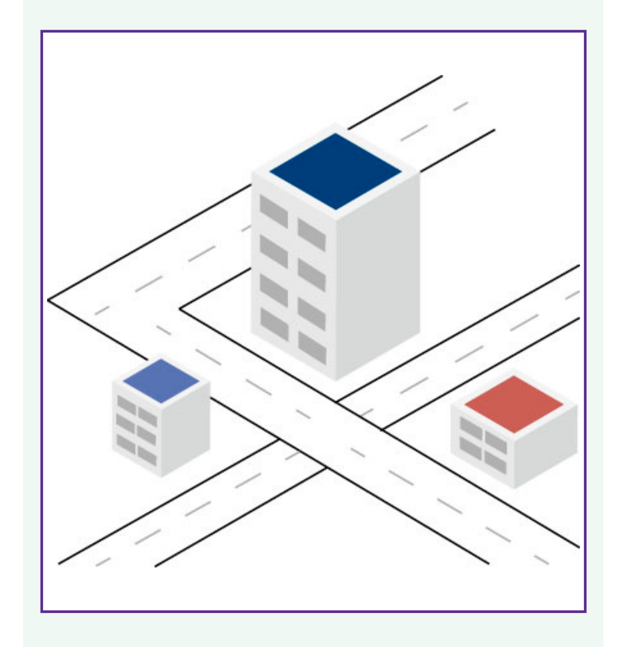


Figura 5.18.—Ejemplo de proyección ortogonal de una tetera.

Actividad 4: La siguiente figura muestra el frente y uno de los laterales de tres edificios. Representa la vista desde atrás de cada uno, procurando mantener las proporciones entre ellos.



3. FORMAS GEOMÉTRICAS. LA FORMA DE LOS OBJETOS

La descripción de los objetos y sus propiedades requiere un vocabulario determinado, como el que ha ido apareciendo a lo largo del capítulo: cuadrado, vértice, perpendicular... Estos términos, además de emplearse en matemáticas para referir figuras, elementos de esas figuras o relaciones entre ellas, también forman parte del vocabulario cotidiano que solemos emplear en multitud de situaciones. Aunque no se empleen con el carácter preciso con el que se manejan en matemáticas, se han convertido en elementos esenciales para identificar, caracterizar objetos y comunicar sobre ellos. Constituyen adjetivos clave porque describen de manera precisa cualidades que permiten diferenciar o identificar unos objetos de otros.

Al realizar una descripción de un cuerpo real, normalmente se recurre a narrar la parte que se ve, es decir, de una de las proyecciones del cuerpo. Se utilizan para estas narraciones los objetos geométricos que, aunque similares a los reales, poseen una serie de características que los hacen ideales para describir el mundo y estudiar sus propiedades. Las características que diferencian a los objetos reales de los geométricos son las recogidas en la tabla 5.1.

Para elaborar una descripción precisa de un objeto o de una forma geométrica pueden emplearse los elementos más sencillos de la geometría del plano: puntos y líneas. Estos elementos, a su vez, se combinan entre sí creando elementos más complejos, como son ángulos, poligonales, polígonos... En ocasiones, necesitamos elementos geométricos espaciales para describir por completo esos objetos.

3.1. Puntos y líneas

Los objetos geométricos más sencillos son la línea y el punto. Un punto es un objeto geométrico sin dimensión que se utiliza para identificar una posición en el plano o en el espacio. Una línea es un camino que pasa por dos puntos. Las líneas tienen características elementales que permiten diferenciar a unas de otras.

Desde el punto de vista de la geometría, se pueden diferenciar líneas curvas o líneas rectas. De entre todas las líneas que en un espacio euclídeo unen dos puntos, sólo una de ellas es recta, la que hace que la distancia a recorrer sea mínima (figura 5.19).

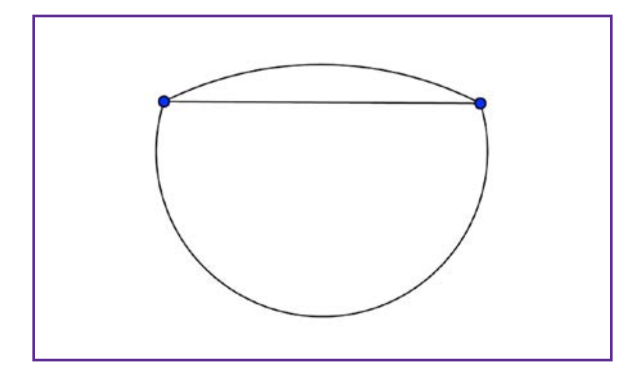


Figura 5.19.—Líneas entre dos puntos.

Desde el punto de vista de la topología, las líneas se diferencian en abiertas y cerradas. Las líneas abiertas tienen principio y fin, mientras que las cerradas no (figura 5.20).

TABLA 5.1

Características que discriminan los objetos reales de las formas geométricas

Objetos reales	Formas geométricas
Son materiales. Ocupan un lugar en el espacio. Tienen tres dimensiones.	Son conceptos (no materiales). No ocupan lugar (son objetos mentales). Los hay de dimensión 0 (el punto), 1 (la línea), 2 (el plano), 3 (el espacio) y de más dimensiones. Se usan para describir los objetos reales.

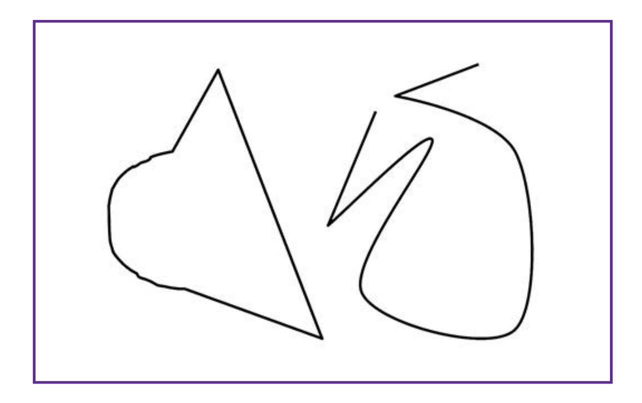


Figura 5.20.—Ejemplos de línea cerrada y abierta.

La combinación de ambas clasificaciones proporciona cuatro tipos de líneas:

- Líneas abiertas curvas, normalmente llamadas líneas curvas o curvilíneas.
- Líneas abiertas rectas, que normalmente reciben el nombre de rectas, semirrectas o segmentos. Cuando se combinan, se denominan líneas poligonales. La línea poligonal de la figura 5.21 está formada por cuatro segmentos que unen cinco puntos.
- Líneas cerradas curvas, denominadas normalmente figuras circulares. Entre ellas destaca la circunferencia.
- Líneas cerradas rectas. Se consiguen uniendo de forma consecutiva varios segmentos hasta que hay una parte de dentro y una de fuera. Reciben el nombre de polígonos. Cada uno de los segmentos que lo conforman se denomina lado, y los puntos extremos de los lados, vértices.

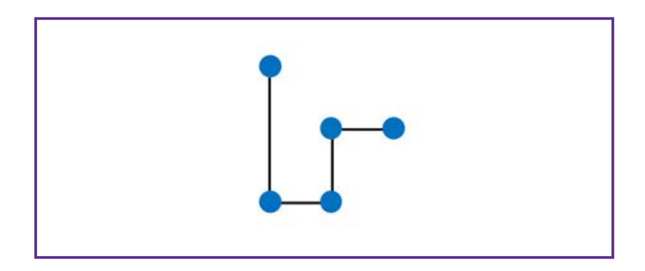


Figura 5.21.—Ejemplo de poligonal de cinco puntos.

Actividad 1: Busca las definiciones de recta, semirrecta y segmento. Dibuja un ejemplo de cada una de ellas.

Actividad 2: Busca una manera de definir qué son una circunferencia, una semicircunferencia y un sector circular. Haz un dibujo de cada una de estas figuras circulares.

Actividad 3: La circunferencia tiene varios elementos importantes: centro, radio, diámetro, arco y cuerda. Realiza un dibujo en el que aparezca cada uno de ellos. ¿Eres capaz de encontrar otro elemento notable de la circunferencia?

Actividad 4: Busca la diferencia entre círculo y circunferencia y señala situaciones reales en las que sea habitual hacer mención de uno u otra. Analiza si se usan correctamente esos términos. Explica tu análisis.

Cuando las figuras no tienen lados curvos, es más sencillo clasificarlas, puesto que es fácil contar sus lados y sus vértices. Un lado es cada uno de los segmentos que constituyen la figura, y un vértice, la intersección de dichos lados.

Un polígono simple es una línea cerrada, formada por segmentos, que sólo divide al espacio en dos partes (dentro y fuera). En la figura 5.22 aparecen un polígono simple y otro que no lo es.

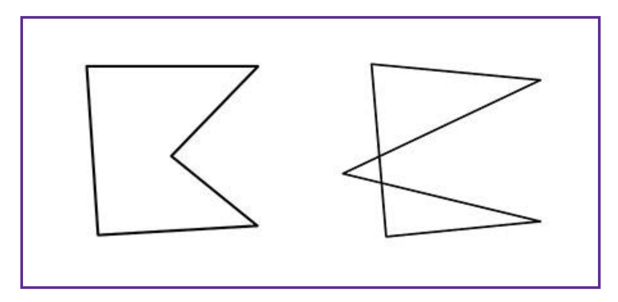


Figura 5.22.—Polígono simple y polígono complejo.

Actividad 5: Clasificación por número de lados. El número de lados de un polígono simple es una cualidad que permite clasificar los polígonos. Completa la tabla siguiente y comprueba si el número de lados coincide con el de ángulos interiores en cada caso:

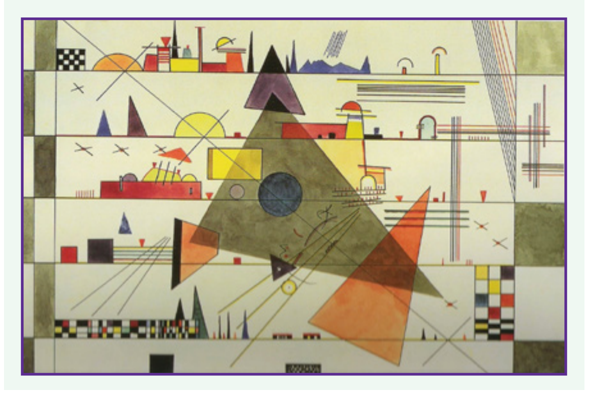
Número de lados	Nombre	Dibujo
Tres		
Cuatro		
Cinco		
Seis		
Siete		
Ocho		
Nueve		
Diez		

Una vez determinado el número de lados, se pueden realizar clasificaciones atendiendo a:

- Regularidad: igualdad/desigualdad de los lados y de los ángulos.
- Paralelismo: paralelismo entre los lados.
- Concavidad/convexidad: medida de los ángulos interiores del polígono.

Actividad 6: Realiza dos clasificaciones diferentes de los triángulos: la primera, atendiendo al criterio de igualdad de lados, y la segunda, atendiendo al criterio tamaño de los ángulos.

Actividad 7: Identifica diferentes figuras geométricas en el siguiente cuadro y propón algún método para organizar los casos que encuentres:

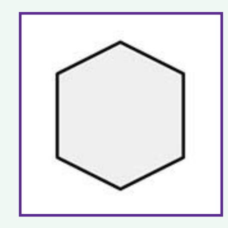


Los cuadriláteros son polígonos simples que tienen cuatro lados. Se clasifican atendiendo a los criterios de paralelismo y regularidad.

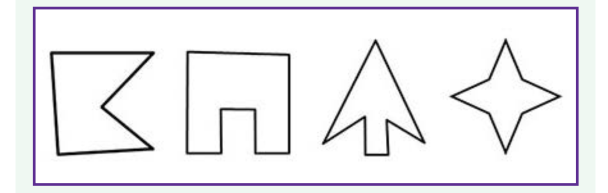
Actividad 8: Utiliza los criterios: paralelismo, regularidad e igualdad de ángulos para clasificar los cuadriláteros. Represéntalos esquemáticamente.

Actividad 9: Define polígono cóncavo y polígono convexo. Dibuja un ejemplo de cada uno de ellos.

Actividad 10: En general, los polígonos de más de cuatro lados se clasifican atendiendo a la regularidad y a la concavidad/convexidad. Por ejemplo, la figura siguiente es un hexágono (seis lados) regular (todos los lados y los ángulos son iguales) convexo.



Clasifica, siguiendo los mismos criterios, las siguientes figuras:



3.2. Cuerpos geométricos

Cuando las descripciones de los objetos o paisajes pretenden ser más globales y acercarse con mayor precisión a lo que nos rodea, se requiere la utilización de un vocabulario geométrico que tiene

que ver con elementos espaciales. Por ejemplo, no es correcto decir «un dado tiene forma cuadrada»; de forma precisa, se puede decir «un dado está formado por seis cuadrados que unidos separan el espacio en dos partes: el interior del dado y el exterior». O, más precisa aún, el dado tiene forma de cubo o forma cúbica. Entre los objetos que nos rodean es mucho más probable encontrar formas espaciales que formas planas o bidimensionales.

Al igual que con las figuras planas, existen unos criterios que permiten realizar clasificaciones de los cuerpos geométricos. Unos atienden a características geométricas (ser plano o ser curvo), y otros, a características topológicas (abierto o cerrado). Por eso existen cuatro posibilidades de cuerpos geométricos:

- Cuerpos geométricos curvos abiertos. Son aquellos que tienen, al menos, una cara curva y que no separan el espacio en partes. Un ejemplo de objeto que podría ser identificado como cuerpo geométrico abierto es un vaso o un macetero.
- Cuerpos geométricos planos abiertos. Todas las caras que los forman son planas. No dividen el espacio en dos partes. Un ejemplo de objeto real es una caja de cartón abierta.
- Cuerpos geométricos curvos cerrados. Tienen una cara curva y separan el espacio en dos partes. Un objeto real que se identifica con este tipo es un balón o un recipiente para guardar comidas. Dentro de los cuerpos con caras curvas se destacan los que se obtienen por revolución: cono y cilindro (figura 5.23).

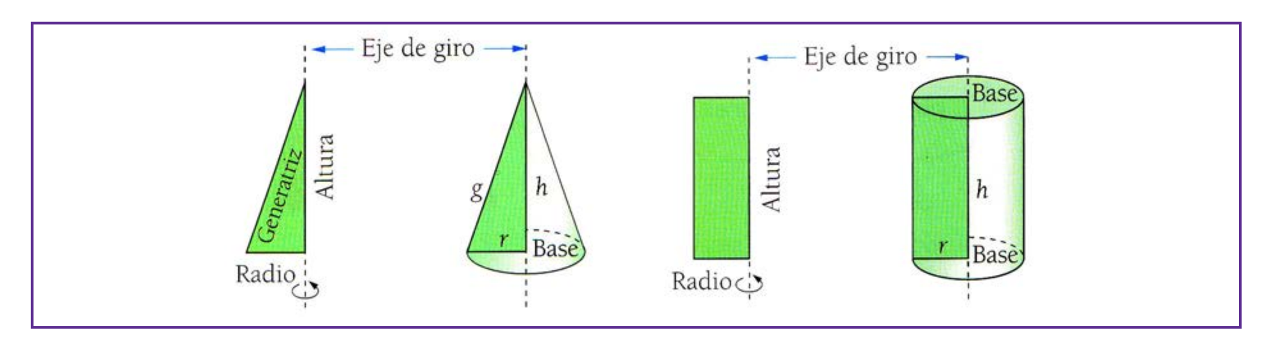


Figura 5.23.—Cuerpos geométricos de revolución.

- Cuerpos geométricos planos cerrados. Todas sus caras son planas y separan el espacio en dos partes. Como ejemplo real, piensa en una caja de cerillas o un envase de tetrabrik.

ACTIVIDAD 11: Busca ejemplos de objetos que tengan sólo caras planas, que tengan sólo caras curvas y que tengan caras curvas y planas.

Los cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas se denominan poliedros. La clasificación de los poliedros no es fácil, y se puede realizar atendiendo a muchas cualidades. Una primera se centra en los elementos básicos que los conforman (figura 5.24), y puede ser el número de caras y la igualdad o no de éstas.

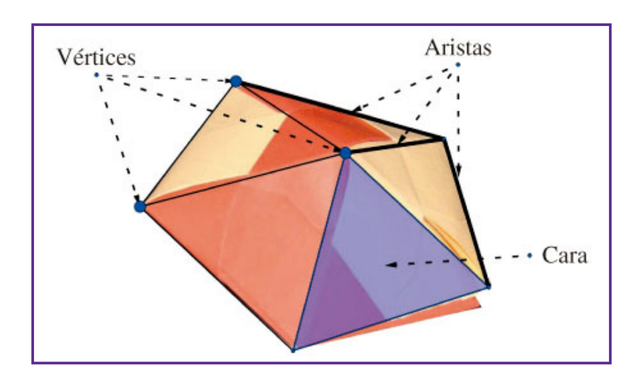


Figura 5.24.—Elementos básicos de los poliedros.

Actividad 12: Busca en Internet posibles clasificaciones de los poliedros. Dibuja todos aquellos poliedros diferentes que encuentres.

La clasificación que atiende a la igualdad de las caras, de los ángulos que forman dos caras unidas y del número de aristas que confluyen en cada vértice selecciona cinco poliedros de entre todos los existentes: son los sólidos platónicos (figura 5.25).

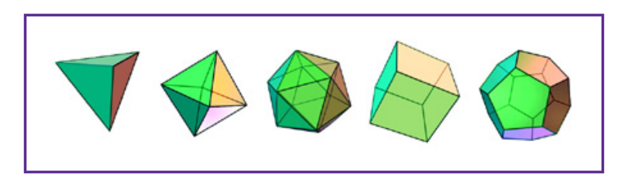


Figura 5.25.—Los poliedros regulares o sólidos platónicos.

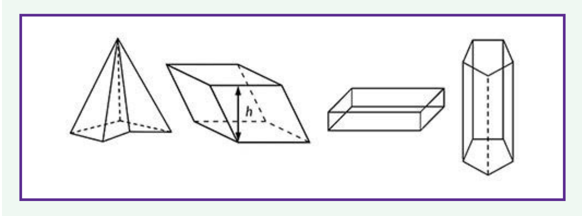
Actividad 13: Investiga por qué se denomina sólidos platónicos a estos cinco poliedros.

Actividad 14: Busca información sobre los sólidos platónicos y completa la siguiente tabla:

Nombre	Vértices	Caras/tipo	Aristas
Tetraedro			
	8		
		8 triángulos equiláteros	12
Dodecaedro			30

Algunos poliedros describen objetos usuales en la vida cotidiana, principalmente edificios. Estos poliedros son los prismas y las pirámides. Los prismas son poliedros formados por dos bases poligonales iguales y paralelas y cuyas caras verticales son cuadriláteros iguales. Para nombrar a los prismas, se atiende a la clasificación de las bases y a la de los cuadriláteros laterales. Las pirámides son poliedros formados por una base poligonal y triángulos iguales que se unen en un vértice superior y se nombran a partir de su base. Así, por ejemplo, las pirámides de Egipto son pirámides de base cuadrada.

Actividad 15: Clasifica los siguientes poliedros.



Actividad 16: El cubo está formado por seis cuadrados unidos entre sí. Usando papel recortado, explora si es posible construir un cubo uniendo seis cuadrados alineados. Investiga cómo deben unirse los cuadrados para poder cerrarlos y formar un cubo. Busca diferentes maneras de colocar los cuadrados.

4. EJERCITA TU APRENDIZAJE. GEOMETRÍA EN EL ARTE

En muchas ocasiones, es posible interpretar obras de arte, construcciones o incluso composiciones musicales por medio de las matemáticas. En este apartado plantearemos varias actividades en las que se pueden poner en juego las nociones que se han introducido en el capítulo y que se enmarcan en diferentes expresiones artísticas.

Actividad 1: La imagen siguiente (de Sagsag, disponible en Flickr) muestra a dos chicos dentro de una bota. Explica en términos de posiciones y distancias los objetos y actores mostrados. Explica cómo puedes hacer una fotografía de ese tipo.



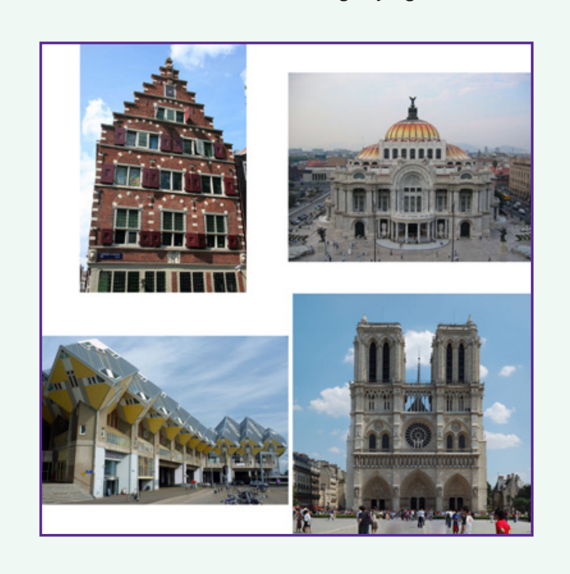
Actividad 2: Este cuadro se titula *El homenaje de un hombre sencillo* y lo pintó el italiano Giotto di Bondone (1267-1337). Observa cómo representó los edificios. Indica si usó algún tipo de perspectiva de las que hemos trabajado. Justifica tu respuesta.



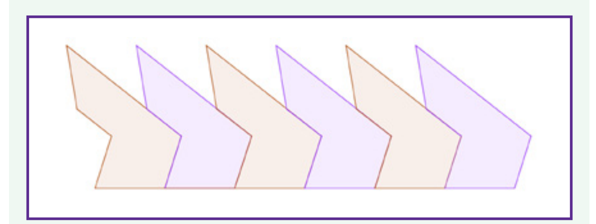
Actividad 3: Observa ahora esta pintura del siglo XII. Indica la diferencia con el cuadro anterior en términos de perspectiva.



Actividad 4: Las siguientes imágenes muestran paisajes urbanos de diferentes ciudades. Describe las construcciones usando lenguaje geométrico.



Actividad 5: La figura siguiente se denomina friso. Consiste en un motivo inicial que se repite varias veces con la posibilidad de girarlo, desplazarlo o considerar su simétrico.



Construye tu propio friso indicando cuál es el motivo mínimo y cómo lo reproduces.

Actividad 6: De manera similar a los frisos, pero con el objetivo de cubrir por completo el plano, se pueden crear mosaicos. En un mosaico, un motivo inicial se reproduce por todo el plano, de manera que no se solape y que no queden huecos sin cubrir. Busca en Internet ejemplos de mosaicos y trata de encontrar el motivo que se repite. Crea tu propio mosaico e indica con claridad el modo de construirlo.

ACTIVIDAD 7: Otro método de generar curiosas formas geométricas de gran belleza es mediante simetrías rotacionales. Se trata de figuras que se construyen mediante el giro reiterado de un motivo inicial en torno a un punto, de manera que tras una vuelta completa el motivo coincida con el estado inicial. La figura que resulta se denomina rosetón, y existen muchos ejemplos en la naturaleza y en portadas de edificios.



Busca otros ejemplos de rosetones y trata de encontrar el motivo básico y cómo gira para generar la figura. Investiga también sobre los «mandalas» y qué tienen que ver con los rosetones.

ACTIVIDAD 8: Las nuevas tecnologías permiten visualizar trayectorias y recorridos tomando puntos de referencia y representando el espacio interactivamente. Programa un viaje en coche. Inventa un viaje familiar con itinerario completo usando algún programa disponible en la web.

ACTIVIDAD 9: Mira instantáneamente la imagen que se adjunta y responde las cuestiones siguientes:

a) Reproduce la disposición de los diferentes objetos que se ven en la imagen y las relaciones espaciales que hay entre ellos.
b) Vuelve a mirar la imagen y comprueba lo exacta que ha sido tu reproducción.



Mira de nuevo la misma imagen y responde las siguientes cuestiones:

c) Describe lo que ves en la imagen, en voz alta, como si estuvieras contándoselo a una amiga que no puede verlo.
d) ¿Crees que a partir de tu descripción tu amiga reconocería la imagen si se le presentara entre otras similares?

6 Pensamiento espacial

ENCARNACIÓN CASTRO
JOSÉ GUTIÉRREZ

El espacio está después del cielo (Leo, 4 años 3 meses)

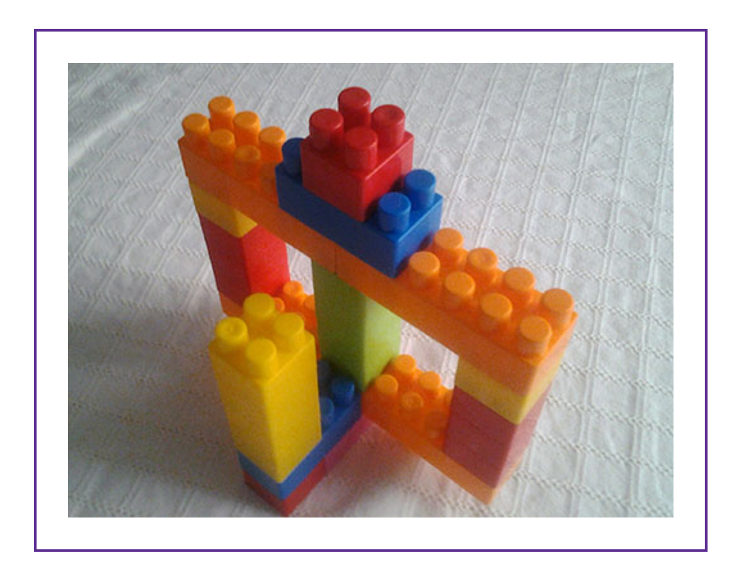


Figura 6.1.—Composición con piezas para encajar.

El pensamiento, o razonamiento, espacial es una competencia que permite interpretar el mundo en el que vivimos y reflexionar sobre nuestro entorno. Se admite que las personas poseen innatamente capacidad espacio-temporal, la cual permite al cerebro mantener en la memoria a corto plazo representaciones mentales que hacen posible pensar por adelantado sobre resultados de sucesos no acaecidos e interpretar información proporcionada por hechos sucedidos con anterioridad. También se admite que la educación puede influir en el incremento y perfeccionamiento de la capacidad espacial de las personas, a cualquier edad.

La importancia del pensamiento espacial se justifica desde una doble posición. Por una parte, el pensamiento espacial presenta un valor intrínseco por el

conocimiento que aporta a la persona para un desarrollo armónico en su relación con el medio en el que vive. Por otra parte, su importancia se justifica por la influencia que tiene en materias relacionadas con profesiones que exigen una alta cualificación, como son la geología, la arquitectura, la astronomía, la geografía, la informática, el modelado, el arte, la aeronáutica. Por ejemplo, los geólogos estudian formaciones rocosas a través del tiempo; y la información que les proporciona aquello que pueden ver y tocar ahora les permite establecer lo que pudo haber sucedido hace millones de años en la formación de esas rocas. El pensamiento espacial influye en que este análisis sea posible.

Además, la investigación sugiere que la capacidad de atención espacial de un niño en las primeras edades predice otras capacidades, y se constata que el desempeño en pruebas centradas en pensamiento espacial-visual correlaciona con logros en las habilidades de lectura, así como en capacidades científicas y matemáticas, en niveles más avanzados.

Este capítulo trata del espacio en el que el niño vive, respira y se mueve y sobre aquello que explora, conquista y debe conocer con el fin de conseguir desenvolverse sin dificultades en el mundo. El capítulo recoge información esencial sobre: pensamiento espacial y su relación con la geometría, el desarrollo del pensamiento espacial en los niños y formas de trabajar la educación del pensamiento espacial en la infancia.

El estudio de este capítulo ha de proporcionar ciertas capacidades profesionales entre las que se encuentran: conocer el desarrollo del pensamiento espacial en la infancia, ser capaz de observar este desarrollo en los niños de educación infantil y preparar situaciones y tareas de aprendizaje que permitan que todos los escolares de las primeras edades avancen en su pensamiento espacial.

ACTIVIDAD 1: El siguiente diálogo se produce entre dos maestras de educación infantil, Celeste y Dulce.

CELESTE: Me siento cómoda cuando los niños trabajan sobre conceptos que yo domino, como es todo aquello relacionado con el número y las operaciones. Pero encuentro dificultad en preparar material y trabajar otro tipo de conceptos, como puede ser lo relacionado con la geometría y el espacio.

DULCE: A mí me ocurre algo similar; creo que el motivo es que siempre se le ha dado más importancia en la enseñanza a la aritmética que a otras partes de la matemática. Entiendo que debemos «ponernos las pilas» y formarnos en otros temas como la geometría y el espacio, buscar y preparar situaciones de aprendizaje para nuestros estudiantes en esa área; seguro que encontramos cosas interesantes.

a) Analiza tu sensación en relación con la aritmética y la geometría y decide si coincide con la mostrada en el diálogo entre Celeste y Dulce.
b) Reflexiona y compara tu disposición a mejorar tus conocimientos con la que muestra Dulce.

1. NOCIONES DE ESPACIO Y GEOMETRÍA

La geometría es la ciencia que estudia el espacio. Es el cuerpo de conocimiento organizado que contempla el espacio. Se distinguen tres contextos concernientes al espacio: espacio de vida, espacio físico y espacio intelectual. Espacio de vida es el espacio-tiempo en el que las relaciones espaciales se establecen entre el sujeto y los objetos del entorno. El espacio físico se centra en la comprensión científica de la naturaleza, en la estructura y función de los fenómenos, y su objeto de estudio puede ser, por ejemplo, la formación de un tsunami a partir de un terremoto. El espacio intelectual implica conceptos y objetos dados por un problema particular, los cuales no necesariamente han de ser conceptos espaciales en sí mismos; por ejemplo, la disputa territorial entre dos grupos étnicos.

En este capítulo nos centramos en el espacio de vida. La cognición, en este caso, implica pensar acerca del mundo en que vivimos, que en cierto modo es un espacio físico restringido y que en este capítulo denominamos espacio.

Según el contexto en el que nos hemos situado, el espacio es el continente de todos los objetos sensibles que coexisten. Este espacio está poblado y estrechamente unido a los objetos. Las personas somos objetos con facultad para vivir y desenvolvemos en el espacio. La geometría, como ciencia del espacio, permite describir y organizar el mundo físico de los objetos. Se interesa por sus atributos (forma, tamaño); ubicación, orientación, dirección y movimiento de los objetos; sus trasformaciones y relaciones. Con respecto al atributo forma, su atención la pone en la línea y figuras planas y tridimensionales que presentan ciertas regularidades; en las transformaciones, como la traslación o el giro; en las relaciones, como la de igualdad —o diferencia— de atributos, el paralelismo, la comparación de tamaños.

Los objetos son entes observables, palpables, manipulables, pero que pueden convertirse en puras creaciones mentales para hacer posible la reflexión sobre ellos. Conocer un objeto requiere realizar bien una serie de tareas relacionadas con él, como: reconocerlo entre otros, encontrar similitudes y diferencias al compararlo con otros, caracterizarlo por algunos atributos propios, reconocer propiedades que posee, nombrarlo.

ACTIVIDAD 1: Describe una situación a realizar con escolares de infantil en la que uno de los objetivos sea describir objetos considerando los atributos: forma, color, textura, olor y sabor.

1.1. Espacio y geometría en el currículo de educación infantil

Los currículos de Educación Infantil, por lo general, tratan del desarrollo del sentido espacial y la geometría. Señalan que dicho desarrollo consiste en que los niños tomen conciencia de sí mismos en relación con las personas y los objetos que los rodean.

Hacen hincapié en que un tratamiento adecuado de la geometría implica mucho más que conocer la denominación de las formas. Señalan como aspectos fundamentales:

- Análisis de las características y propiedades de las formas geométricas de dos y tres dimensiones, teniendo en cuenta las relaciones geométricas.
- Estudio de ubicaciones y descripción de relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación.
- Reconocimiento y aplicación de transformaciones, como el giro. Reconocimiento y creación de formas que tienen simetría.
- Reconocimiento de formas y estructuras geométricas en el entorno. Utilización de la visualización y memoria espacial para crear imágenes mentales de formas geométricas que permitan reconocerlas y representarlas desde diferentes perspectivas.

ACTIVIDAD 2: Analiza el currículo de Educación Infantil vigente y realiza un informe (300 caracteres máximo) en el que se recoja el tratamiento que prescribe dicho currículo sobre el espacio y la geometría.

2. PENSAMIENTO ESPACIAL EN EDADES TEMPRANAS

El pensamiento espacial, puesto en acción, se denomina sentido espacial, y está compuesto de conocimiento, habilidades y hábitos de la mente para organizar el espacio. Conlleva la comprensión del mundo y permite moverse en el espacio e identificar, analizar y comprender la ubicación de objetos y visualizar sus patrones de comportamiento. Tareas simples como realizar un estacionamiento u otras más complejas como el diseño de un edificio exigen cierto pensamiento espacial. El pensamiento espacial se vale de herramientas como la representación (mapas y gráficos) y utiliza procesos de razonamiento para percibir y resolver problemas mediante la exploración.

Existen argumentos que justifican el desarrollo del sentido espacial en edades tempranas como los siguientes:

- La habilidad espacial temprana está ligada al éxito en matemáticas y ciencias, en niveles educativos posteriores.
- Todo aprendizaje en el campo espacial conlleva aprendizaje espontáneo en otros campos.
- La habilidad espacial es un indicador de la creatividad que el individuo puede llegar a desarrollar posteriormente.
- Los estudiantes que desarrollan habilidades de pensamiento espacial robustas estarán en ventaja en nuestra sociedad cada vez más global y tecnológica.
- La incapacidad de una persona para situarse en el espacio bloquea su desarrollo mental.

2.1. Adquisición de habilidades espaciales

La adquisición de la idea de espacio como marco familiar no se realiza de golpe, sino que comienza con los primeros gestos coordinados del bebé y continúa en la adolescencia. El ser humano, desde temprana edad, utiliza sus sentidos como receptores para captar información sobre el mundo que le rodea, crea sus patrones sensoriales. Mucha de esta información sensorial es de carácter espacial. La percepción de la realidad, la posibilidad de localizar sonidos desde su nacimiento, el funcionamiento del reloj biológico sugieren que el organismo viene provisto de una estructura capaz de ordenar las primeras experiencias según un esquema espacio-temporal. Los cambios de postura del cuerpo, el balanceo, los movimientos de la cabeza o de los ojos hacia una fuente de estímulos, los primeros intentos para ponerse en pie, entre otros, proporcionan sensaciones de tipo espacial. Las experiencias espaciales iniciales se verán reforzadas cuando el bebé empieza a andar.

Aprende a moverse en el espacio y a ver los objetos desde diferentes posiciones y reconocerlos, independientemente de la posición. Adquiere capacidad para orientarse en relación con los objetos y



Figura 6.2.—Niño gateando.

establecer relaciones de posición de unos objetos respecto a otros. Se iniciará en la diferenciación de horizontalidad y verticalidad a través de la posición de su propio cuerpo.

El pensamiento espacial de un adolescente para llegar a desenvolverse en nuestra sociedad deberá haber alcanzado, al menos, conocimientos que le permitan:

- Determinar la posición de su cuerpo en el espacio.
- Determinar la posición relativa de distintos objetos que le servirán de referencia en sus desplazamientos.
- Poder orientarse.
- Apreciar distancias y dimensiones.
- Conocer la forma de los objetos familiares.
- Poder agrupar los objetos por categorías.

Estas capacidades que comienzan a formarse en edades tempranas tendrán un desarrollo más rápido en ambientes ricos, creados a veces con intencionalidad educativa y otras veces sin dicha intencionalidad. Muchos niños comienzan a adquirir estas capacidades antes de la escolarización, si su vida discurre en ambientes adecuados. La escuela ha de procurar que todos los niños, sin distinción de género ni clase, étnica o social, tengan la oportunidad de iniciarse en dichas capacidades.

Actividad 1: Describe el proceso de «gateo», o andar a gatas, de un niño. Reflexiona sobre la capacidad espacial que se pone en juego en ese proceso de gateo.

2.2. Atributos de los objetos. Igualdad

La infancia es un período de gran desarrollo sensorial. Las sensaciones proceden de los diferentes objetos que rodean al individuo, el cual llega a construir patrones sensoriales propios que le servirán de marco de referencia con el que comparar otras realidades que vaya descubriendo. A medida que pasa el tiempo, el niño aprende a utilizar patrones sensoriales aceptados socialmente y de uso común, basados en los atributos de los objetos: color, forma, tamaño. Inicialmente serán los colores primarios, las formas geométricas simples y la comparación entre dos objetos, uno grande y otro pequeño. Estos patrones son asimilados en el transcurso de la actividad normal, incluso en situaciones sin intencionalidad educativa. El dominio de algunos patrones permite percibir las propiedades de los objetos que coinciden con dichos patrones, así como seguir ampliándolos. En la adquisición y ampliación de dichos patrones sensoriales se suele seguir una progresión evolutiva observable. Por ejemplo, en el aprendizaje de la igualdad de dos objetos mediante la comparación de sus atributos (dos objetos son iguales si todos sus atributos lo son) suelen desarrollar estrategias que pasan por etapas o niveles. A continuación, presentamos una trayectoria hipotética de enseñanza-aprendizaje centrada en la distinción de los atributos de los objetos (tabla 6.1).

Actividad 2: Programa una tarea en la que los niños tengan necesidad de explorar objetos por percepción no visual. Toma como objetivo el que establezcan conexiones entre las diferentes sensaciones que perciben. Indica cómo sería la tarea, cómo se desarrollaría y qué preguntas harías.

TABLA 6.1

Trayectoria de enseñanza-aprendizaje: atributos de los objetos

Expectativa de aprendizaje: *adquirir la capacidad de percibir la igualdad de objetos atendiendo a la igualdad de todos sus atributos*				
Edad Años	**Nombre del nivel**	**Nivel**	**Acción del niño**	**Actuación educativa**
3	Relacionar objetos iguales.	1	Distinguir dos objetos iguales del mundo real.	Proporcionar objetos variados, algunos iguales. Proponer tareas en las que sea necesario agrupar objetos iguales.
4	Relacionar objetos similares.	1	Juzgar como iguales dos objetos con alguna similitud visual.	Proporcionar objetos variados, algunos de los cuales presenten similitud. Proponer tareas en las que haya que agrupar objetos (hojas de diferentes árboles).
4	Comparar un atributo.	1	Percibir que dos objetos comparten la igualdad de un atributo (un lado, una esquina, el color).	Con bloques lógicos, o similares, proponer tareas en las que se discrimine un atributo (series).
4	Comparar varios atributos.	2	Percibir que dos objetos comparten más de un atributo.	Con piezas de construcción de colores y tamaños diferentes, proponer tareas que permitan discriminar más de un atributo (construir una torre sólo con las piezas que sean azules y cuadradas).
5	Comparar la mayoría de los atributos.	3	Percibir los atributos, aunque puede ignorar alguno.	En construcciones ya realizadas, buscar qué atributos tienen igual.

2.3. Orientación espacial

La orientación espacial consiste en conocer la posición en el espacio de los objetos y de uno mismo, quieto y en movimiento. Permite a una persona saber dónde se encuentra y cómo moverse en el mundo. Esto supone entender y operar con las relaciones entre las posiciones de los diferentes objetos, especialmente con respecto a su propia posición.

Se comienza a adquirir el conocimiento ligado a la orientación espacial en la infancia, mediante el movimiento. La exploración libre de los primeros años y las experiencias permiten al niño orientarse, describir rutas. Ponerse de pie y caminar le proporciona sensación de verticalidad, y arrastrarse, de horizontalidad. Sobre los 2 años presenta un conocimiento fragmentado de su mundo, así como de su esquema corporal. Hasta los 3 o 4 años no tiene noción de unidad de su propio cuerpo y va adquiriendo paulatinamente una concepción de sí mismo distinta de todo aquello que es exterior a él.

A lo largo del segundo año de vida el niño comienza a representar internamente las cosas, es decir, es capaz de sustituir acciones sobre objetos por imágenes, las cuales pueden ser evocadas independientemente de la propia acción. Crea mapas mentales de las relaciones espaciales que percibe. Aunque no está claro qué tipo de mapa mental poseen

los niños pequeños, se conoce que sobre los 3 años pueden construir un mapa sencillo sobre espacios conocidos, con juguetes, y colocar un objeto en lugares concretos cuando se les especifica un punto de referencia.

Se cree que moverse por el espacio, en principio, requiere hitos, pasando posteriormente a hacerlo por rutas con una serie de puntos de referencia conectados, hasta llegar a la construcción de un mapa mental más preciso. Este proceso de aprendizaje de orientación espacial requiere tiempo.

Sobre los 3 años el niño comienza a establecer referencias para la ubicación de objetos en el espacio. Hasta entonces, su cuerpo es el centro, el punto de partida sobre el que determinará todas las direcciones, como: delante y detrás, derecha e izquierda. Sobre los 4 años su mano derecha, utilizada por la mayoría para realizar sus acciones cotidianas, la distingue de la izquierda, y, por referencias a ellas, otras partes de su cuerpo consideradas a la derecha o a la izquierda del mismo. Estas referencias las manejará, en principio, de forma absoluta y no comprenderá, sin embargo, su aspecto relativo. Por ejemplo, un objeto que para él está a su derecha para otra persona puede estarlo a su izquierda. Aprende las nociones de proximidad, lejanía, arriba, abajo, delante y detrás. Las nociones de izquierda y derecha aparecerán algo retrasadas con respecto a las anteriores.



Figura 6.3.—El propio cuerpo como referencia.

Inicialmente todas estas nociones tienen a su propio cuerpo como referencia, pero más tarde relacionará dos objetos cualesquiera. Una vez que consiga orientarse en el espacio, descubrirá las relaciones entre los objetos, la referencia de un objeto respecto a otro. Un momento crucial en el desarrollo general de la comprensión del espacio es aquel en el que se produce la transición del sistema de referencia centrado en el propio cuerpo a un sistema con puntos de referencia móvil.

Los niños, en principio, crean marcos simples, con referencia centrada en su propio cuerpo; es lo que se conoce como coordenadas corporales, egocéntricas o relativas al sujeto. Comienzan a formar la idea de ejes corporales: eje vertical, eje longitudinal y eje horizontal (véase capítulo 5). Estos marcos se amplían con el paso del tiempo y aparecen marcos locales que están desligados de su propio cuerpo. En los niveles de primaria alcanzan capacidad para observar una situación y crearse un mapa mental de ella (véase trayectoria hipotética de enseñanza-aprendizaje; capítulo 2).

ACTIVIDAD 3: Describe dos juegos populares que conozcas y que potencien la orientación espacial.

ACTIVIDAD 4: La rayuela es un juego popular del cual se conocen diferentes tipos. Busca información sobre este juego, elige uno de los tipos, descríbelo e indica qué habilidades espaciales se potencian con él.

2.4. Ubicación

La ubicación trata de dónde está una persona, objeto o lugar, en el espacio. Conocer la ubicación parece algo muy simple, hasta que se intenta describir un lugar sin invocar al menos otro concepto espacial, como la distancia, la dirección, la proximidad, recinto, u otro aspecto topológico. Por ejemplo, cuando se dice «la pelota que estás buscando está en el sótano, dentro de una caja que hay delante de la mesa redonda», se están usando conceptos de lugar, recinto, proximidad y forma. Esta compleji-

dad hace que el desarrollo de la capacidad de ubicar objetos tenga un proceso lento.

La descripción de la ubicación de objetos, que tiene una fuerte carga de expresión oral, ha sido motivo de investigación. Los niños pequeños a menudo se enfrentan a peticiones para describir el paradero de algún objeto que se echa en falta. Por ejemplo, «dime dónde están tus zapatos». Debido a que hay muchos lugares potencialmente confundibles en un espacio dado, recordar y comunicar dónde se ha colocado un objeto requiere, normalmente, la codificación de su ubicación en relación con uno o más puntos de referencia. Se conocen como referencias espaciales anidadas aquellas en las que intervienen varios puntos de referencia. Por ejemplo, «los zapatos están en mi dormitorio, delante de la mesita de noche», presenta dos referencias que permiten al oyente distinguir uno entre los diferentes dormitorios de la casa y precisar el lugar en la habitación donde está el objeto zapato.

A pesar del avance de la investigación, se sabe poco acerca de la aparición de las habilidades de comunicación espaciales o los factores que influyen en la capacidad de los niños para comunicar con éxito sobre la ubicación de los objetos. A los 4 años, tienen gran dificultad para usar diferentes puntos de referencia; a los 6 años se inicia esta capacidad.

Una explicación plausible que se da a esto es que los niños pequeños no tienen conciencia de las necesidades del oyente. Cuando existen lugares potencialmente confundibles en un espacio, no reconocen la necesidad de proporcionar información espacial adicional que ayude al oyente a distinguir entre la referencia adecuada y otras que no lo son. La respuesta a la pregunta ¿dónde están los zapatos? suele ser: «allí», «ahí» o «no lo sé».

ACTIVIDAD 5: Adapta el juego de «Veo, veo» de manera que las pistas dadas a los jugadores sean sobre ubicación de objetos. Ejemplifica con dos situaciones.

ACTIVIDAD 6: Inés (5 años) dice: «la muñeca la he dejado en mi cuarto, dentro de la caja de juguetes». Analiza la precisión que hace Inés sobre la ubicación de la muñeca.

3. VISUALIZACIÓN

La visualización espacial es la capacidad cognitiva que permite crear imágenes mentales y manipularlas en la mente. La imagen mental no es una «imagen en la cabeza» como una foto fija del objeto real, sino que se trata de algo más abstracto, más maleable y menos nítido que la foto del objeto. La visualización permite imaginar la realización de transformaciones de las formas «viendo», con los «ojos de la mente», el resultado de dichas transformaciones. El pensamiento visoespacial permite manipular ideas a través de dibujos simples y fácilmente reconocibles. Utiliza la visión ocular que identifica, localiza y permite pensar acerca de los objetos y del «yo» en el mundo, convirtiéndola en imágenes que pueden ser inspeccionadas, transformadas y mantenidas en la mente en ausencia de un estímulo visual. La visualización está asociada al pensamiento espacial a través de diferentes actividades que incluyen la construcción y manipulación de representaciones mentales de los objetos, sus relaciones y transformaciones.

Un pensador espacial experto visualiza relaciones, imagina cambios de una escala a otra, gira mentalmente un objeto para ver sus otros lados, crea un nuevo ángulo de visión o perspectiva y retiene imágenes de objetos sin que éstos estén presentes. Ejemplos de esta actividad mental son las actuaciones que arquitectos e ingenieros realizan cuando diseñan edificios, la capacidad que permite a un químico contemplar la estructura tridimensional de una molécula, la de un cirujano para navegar por el cuerpo humano y la de un escultor para visualizar sus futuras esculturas.

La representación mental independiente de la vista de los objetos es una capacidad esencial para alcanzar una concepción de los objetos como entidades constantes que son independientes del propio sujeto. Piaget sostenía que los bebés están severamente limitados en este sentido por su dependencia de la referencia espacial egocéntrica y que la mayoría de los niños no pueden realizar movimientos complejos de imágenes hasta la educación primaria. Otros investigadores han obtenido evidencias que no corroboran esta posición. Se ha llegado a constatar que con pocos meses los bebés pueden discriminar objetos según su forma real. También que las

primeras representaciones de los bebés de las relaciones espaciales no son tan sesgadas egocéntricamente, lo que prueba que con poca edad las personas pueden representarse la disposición espacial de su entorno con independencia de las coordenadas egocéntricas. Se considera que los bebés pueden hacer una representación mental de los objetos, para lo cual necesitan utilizar un marco de referencia espacial independiente de coordenadas egocéntricas.

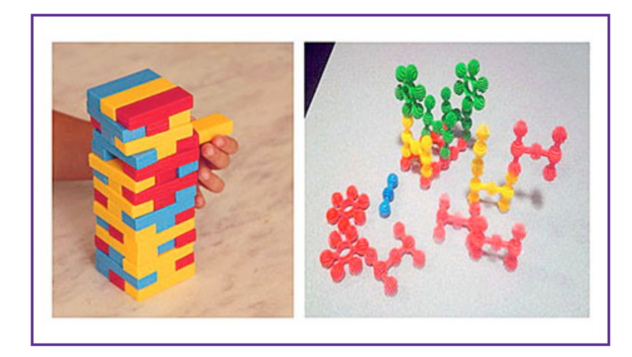


Figura 6.4.—Material comercial cuyo uso puede influir en el desarrollo del pensamiento visual.

ACTIVIDAD 1: La figura 6.4 muestra materiales cuyo uso puede potenciar la visualización en las primeras edades. Busca y propón otros dos materiales, o juegos, que también potencien dicha capacidad cognitiva. Describe los dos materiales que propones.

3.1. Perspectiva

La perspectiva visual es entendida como la capacidad de aceptar una representación de los objetos diferente de la visión instantánea propia. Esta capacidad se ha estudiado ampliamente en los niños. Los trabajos pioneros realizados por Piaget y sus colaboradores llegaron a plantear que la perspectiva no aparece en los niños hasta los 8 años. Otros trabajos posteriores han concluido que el conocimiento sobre que los objetos son visibles desde otro punto de vista diferente al propio surge muy temprano en la vida. El estudio de la noción de perspectiva en los niños se ha hecho mayormente a través de sus dibujos, que se suponen hacen visibles los objetos tal como los perciben en su mente.

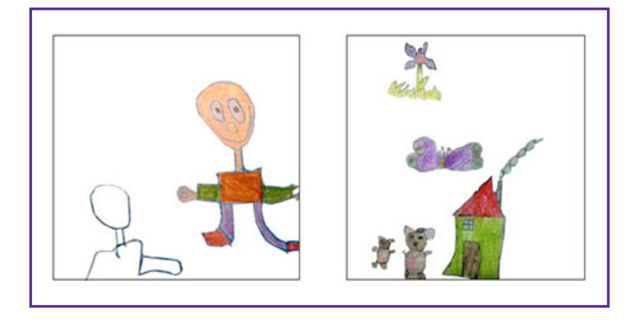


Figura 6.5.—Dibujos hechos por niños.

Se consideran dos niveles en el desarrollo del conocimiento de la perspectiva:

- *Nivel 1, de inferencia no egocéntrica.* El niño conoce que otra persona puede ver un objeto no visible para él, o viceversa, pero no percibe cómo esa persona ve las cosas.
- *Nivel 2, de varias perspectivas.* El sujeto posee la capacidad de representar y coordinar múltiples perspectivas en un marco espacial; esta capacidad emerge alrededor de los 4 o 5 años y su rendimiento mejora considerablemente entre los 6 y los 8 años.

ACTIVIDAD 2: Analiza los dibujos que se presentan en la figura 6.5 y conjetura el nivel de perspectiva que muestran sus autores. Justifica tu conjetura.

3.2. Mapas

Un mapa es una representación del espacio realizada sobre un soporte plano. Los mapas transmiten información sobre múltiples relaciones espaciales simultáneamente, cualitativa y cuantitativa, lo que hace que promuevan el pensamiento espacial. Puede parecer que las actividades que involucran los mapas son demasiado complicadas para los niños. Sin embargo, en infantil, pueden hacer modelos de

su clase representando los muebles, lo que conduce a afirmar que tienen capacidad inicial antes de su formación.

Sobre los 4 años pueden interpretar mapas y planificar itinerarios en situaciones muy simples. Con más de 4 años pueden localizar grupos de muebles en un modelo a escala de su clase, pero tienen confusión en ítems en los que deben posicionarse en el espacio representado en el mapa. La habilidad para usar rutas en un mapa o plano se forma sobre los 5 años de edad. Sobre los 6 años, pueden planificar rutas en formas más complejas con múltiples alternativas, usando información sobre distancias. Por ejemplo, a los 5 o 6 años de edad pueden usar mapas para moverse por caminos alrededor de la escuela, pero tienen menos éxito haciéndolo por calles más alejadas. La capacidad sobre distancias geométricas y escalas es adquirida alrededor de los 6 o 7 años, habilidad que se va mejorando con la edad (incluso los adultos no llegan a alcanzar plenamente esta competencia). Los estudios muestran que, en relación con esas habilidades, existen muchas diferencias individuales entre los niños.

Una actividad con fines centrados en la interpretación de mapas consiste en disponer de un mapa de la clase y localizar la mesa en la que cada grupo está ubicado y la silla en que cada niño se sienta. Incorporar otras localizaciones que se pueden buscar en el mapa de la clase puede enriquecer la actividad.

ACTIVIDAD 3: Imagina que eres responsable de una clase de escolares de 5 años que va a salir de excursión para conocer el barrio donde se ubica el colegio. Planifica la situación para que los escolares realicen un mapa. Incluye objetivos y acciones a realizar. Describe la situación que has planificado.

4. FORMAS

Las formas por las que se interesa la geometría euclídea en los niveles educativos iniciales son las formas geométricas básicas de dos y tres dimensiones y aquellas que presentan alguna regularidad, como la simetría. Un conocimiento de las formas geométricas planas (de dos dimensiones) requiere reconocerlas, nombrarlas y representarlas. La investigación ha determinado niveles para el reconocimiento de las formas geométricas planas más sencillas.

- *Nivel de prerreconocimiento.* Los niños no pueden identificar de manera fiable círculos, triángulos y cuadrados. En este nivel, los patrones de esas formas se están desarrollando. Los escolares consideran círculos a aquellas formas cerradas y redondeadas; las que tienen cuatro lados casi iguales con ángulos aproximadamente rectos son tomadas por cuadrados, y a las que presentan cuatro lados con paralelismo aproximado de los lados opuestos, con un par más largo, se considera rectángulos.
- *Nivel visual.* Se alcanza cuando se pueden reconocer las formas como totalidades, holísticamente. Por ejemplo, una figura es un rectángulo debido a que se ve como una puerta; un niño de 4 años puede llamar cuadrado a una forma rectangular, pues no puede pensar en un cuadrado como una figura que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos. En este nivel la ausencia de una imagen mental de las formas no permite pensar en sus propiedades.
- *Nivel analítico/descriptivo.* En este nivel se reconocen y caracterizan las formas por sus propiedades.

También la investigación ha determinado que el aprendizaje de los nombres de las formas prototípicas no es sólo producto del paso del tiempo y la maduración; es necesario experimentar con ellas y manipularlas en todas sus variedades. Los niños que lo hacen aprenden conceptos más ricos, incluso a edad temprana. Aquellos niños que no realizan tal manipulación presentan sesgos en su aprendizaje. Por ejemplo, aceptar como triángulos sólo los que son isósceles. A veces niños de 3 años de edad responden mejor que otros de 6 años. Este hecho se achaca a la mayor experiencia de los niños de 3 años con ejemplos, contraejemplos y discusiones sobre las formas y sus características. Niños de 4 años distinguen triángulos por sus tres puntos (vértices)

y sus tres lados aunque muchos no conocen qué es un vértice o un lado.

En niveles educativos posteriores, los escolares tienden a ver el cuadrado y el rectángulo como dos formas separadas, sin relación entre sí, en vez de ver el cuadrado como un rectángulo «especial». Creen que el rectángulo siempre ha de tener dos lados más largos; tampoco consideran que un cuadrado sea un cuadrilátero, un paralelogramo y un rombo especial. Desde la educación infantil se deben introducir estas ideas, pues si bien es prematuro el aprendizaje de todas estas palabras y conceptos en los niños pequeños, sin embargo el profesorado debe mantener el verdadero significado de tales términos en mente y evitar introducir ideas erróneas en la infancia.

La representación de las formas también ha sido investigada. Los niños son capaces de reconocer las formas geométricas básicas hacia los 3 años y medio. Sin embargo, aún no pueden representarlas. La construcción del espacio representacional necesita la función simbólica, o semiótica, que es la capacidad que tiene la mente para utilizar símbolos como representación de una cosa o idea. Según Piaget, esta capacidad no alcanza su máxima expresión hasta el período preoperacional.

Se ha constatado que a los 3 años la representación de figuras planas como un cuadrado y un círculo se realiza mediante una línea recta. Alrededor de los 4 años comienza a dibujar el cuadrado considerando sus cuatro lados, aunque éstos no sean rectos ni tengan ángulos definidos. Posteriormente, pueden explicar por qué una forma pertenece a una determinada categoría. También se conoce que se requieren dos años para pasar de dibujar un cuadrado a poder dibujar un rombo.

Hacer un dibujo es un acto de representación, que ilustra la comprensión infantil de las ideas. Pero se conjetura que la incapacidad de los niños pequeños para dibujar o copiar las formas más simples puede estar asociada a la coordinación de sus propias acciones y no a la idea poco precisa de la forma. No obstante, algunos investigadores no creen que las representaciones poco adecuadas se deban sólo a dificultades motoras, dado que hay niños que pueden dibujar objetos conocidos que presentan ángulos rectos y no dibujar un cuadrado con ángulos rectos.

ACTIVIDAD 1: Analiza las representaciones de las formas que aparecen en la casa de la figura 6.6.

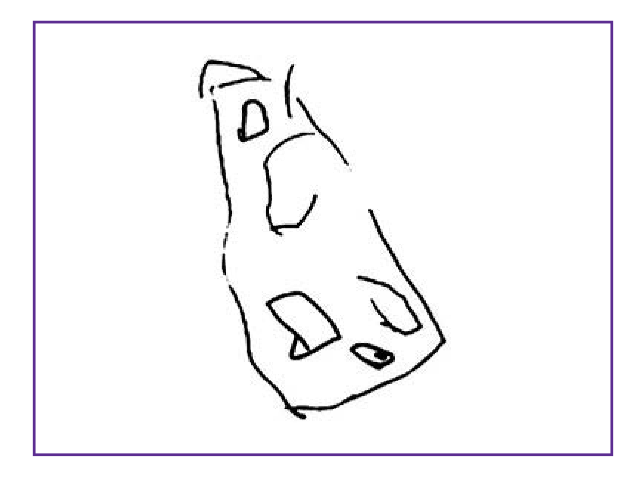


Figura 6.6.—Dibujo de una casa hecho por Tina (3 años, 6 meses).

5. TAMAÑO

El tamaño de los objetos es un atributo relativo de los mismos. La percepción del tamaño se adquiere por la comparación y relación de objetos entre sí. La comparación hace ver si un objeto es de menor o mayor tamaño que aquel con el que se compara. Posiblemente sea ésta la razón de que su percepción sea posterior a otros atributos. Entre los 4 y 5 años un niño con desarrollo sensorial normal posee un repertorio de patrones sobre forma y color bastante completo; el tamaño está todavía incipiente. En un principio sólo se relacionan dos objetos, grande-pequeño. Posteriormente se establecen las relaciones dimensionales de tres objetos, grande-mediano-pequeño; se harán las comparaciones: más grande que..., más pequeño que..., y se comienza a designar como grandes o pequeños algunos objetos, aunque no aparezcan comparados con otros. En estos casos la comparación es con un referente no explícito, y para llegar a hacerla es necesario reconstruir en la memoria el lugar que ocupa el objeto entre otros que son sus referentes y establecer la relación. El referente puede ser el propio cuerpo (véase capítulo 10).



Figura 6.7.— Dibujo presentado en una ficha para discernir cuál de los objetos es mayor y cuál menor.

En algunas fichas de trabajo de los escolares, la tarea que aparece asignada al tamaño consiste en señalar, en un dibujo de dos o tres objetos, el mayor y el menor. Pero lo que se compara en la ficha es el tamaño de la representación, y pudiera ser que dicha representación distorsione la realidad. Por ejemplo, se puede representar una hormiga y un elefante y la hormiga ocupar en el papel una superficie mayor que la del elefante, debido a que se ha tomado el elefante a mucha más distancia que la hormiga. Igual consideración se puede hacer para dos representaciones del mismo objeto, como se muestra en la figura 6.7. Este ejercicio de elección, si bien es adecuado, no es suficiente. Es necesario que los niños, inicialmente, comparen objetos reales, que les proporcionarán mayor conocimiento del medio.

6. LENGUAJE Y VOCABULARIO ESPACIAL

La formación de las nociones espaciales lleva asociado el conocimiento de un vocabulario específico. Se sabe que sólo con el uso del lenguaje no se construyen conceptos, pero sí ayuda a fijarlos. Se ha puesto de manifiesto, en la investigación, que el conocimiento y uso de un vocabulario rico, sobre el espacio, influyen en el desarrollo temprano del pensamiento espacial. Los niños que han oído hablar mucho y han utilizado un lenguaje espacial variado obtienen mejores resultados en pruebas de conocimiento espacial.

Cada componente del pensamiento espacial posee su propio vocabulario. Como ejemplo, presentamos en la tabla 6.2 el vocabulario asociado a las nociones topológicas: continuidad, discontinuidad, vecindad, apertura, cierre, interior, exterior, agujereado.

TABLA 6.2

Vocabulario de las nociones topológicas

Noción	Vocabulario asociado
Continuidad	Continuo, incesante, perpetuo, perenne, eterno, imperecedero, duradero, permanente, fijo, estable, continuado, inamovible, ininterrumpido, constante, persistente, invariable, perseverante.
Discontinuidad	Discontinuo, discreto, separado, intermitente, salpicado, interrumpido, entrecortado, detenido, alterno, espaciado, no seguido.
Vecindad	Alrededores, inmediaciones, junto, contorno, cercanías, afueras, a continuación, aledaños, frontera, extramuros, proximidad, inmediación, linde.
Apertura	Abierto, comienzo, iniciación, principio.
Cierre	Cerrado, clausura, cese, terminación.
Interior	Interno, profundo, oculto, adentro, céntrico, rodeado.
Exterior	Externo, visible, manifiesto, aparente.
Agujereado	Pinchado, perforado, atravesado, taladrado, acribillado, picado, traspasado, poroso, calado.

Posiblemente el aprendizaje de todo este vocabulario asociado a los conceptos que representan sea demasiado complicado para los niños pequeños. No obstante, es conveniente el manejo usual, con su verdadero significado, por los maestros, lo que permitirá a los niños un acercamiento a todas estas palabras.

Actividad 1: Realiza una tabla similar a la 6.2 que recoja el vocabulario asociado a:

- Noción de orientación.
- Noción de ubicación.
- Nociones de geometría euclídea.

Actividad 2: Lee con atención los diálogos siguientes sacados de los clásicos infantiles y valora su interés para el aprendizaje de vocabulario relacionado con el espacio.

a) *—Voy a casa de mi abuelita.../—¿Vive muy lejos?/—Bastante lejos; ¿ve usted aquel molino que hay allá abajo?, pues al otro lado, en la primera casa de la aldea.*

b) *No tengan ustedes miedo, vengan detrás de mí: echó a andar delante y guiándose por las chinitas volvió por el mismo camino por el que habían ido al bosque. [En otra ocasión] esperaba encontrar el camino como la primera vez, gracias a las migajas de pan sembradas a su paso*.

Actividad 3: Elige algunos fragmentos representativos de otros textos que permitan trabajar de manera globalizada.

7. PENSAMIENTO ESPACIAL VERSUS PENSAMIENTO SECUENCIAL

El pensamiento espacial y el pensamiento secuencial son dos organizaciones mentales diferentes que afectan a la forma de ver el mundo. El pensamiento secuencial es lineal, y se desarrolla paso a paso con el tiempo. El pensamiento espacial es un sistema holístico en el que todo el conocimiento está interconectado. La acción auditiva se asocia con el pensamiento secuencial, y la acción visual, con el pensamiento espacial.

El pensamiento secuencial implica análisis, organización de la información en progresión, de lo simple a lo complejo, razonamiento inductivo.

El pensamiento espacial implica síntesis, una comprensión intuitiva de los sistemas complejos (incluso pueden faltar algunos pasos), el procesamiento simultáneo de conceptos, el razonamiento deductivo (capítulo 3), el uso de la imaginación y la generación de ideas mediante la combinación de hechos existentes (pensamiento creativo). El pensamiento espacial está influido por la visualización y las imágenes.

La investigación ha mostrado que las personas con inteligencia especialmente dotada tienen preferencia por el pensamiento espacial-visual, ya que es más rápido y potente que el pensamiento secuencial-auditivo.

8. DÉFICIT EN PENSAMIENTO VISOESPACIAL

Algunas dificultades de aprendizaje están ligadas a un déficit de pensamiento visoespacial. Estas dificultades han sido menos estudiadas y conocidas por los maestros que otros tipos de dificultades, como pueden ser la discalculia y la dislexia. Los déficits visoespaciales afectan tanto a la vida cotidiana como al ámbito académico y siguen teniendo un impacto significativo en la edad adulta. Los sujetos que presentan estos déficits pueden tener dificultades en la vida real:

- Les será muy difícil orientarse y encontrar un camino adecuado; pueden incluso perderse en un entorno desconocido.
- Cuando son mayores, pueden tener serias complicaciones para algunas tareas cotidianas como aprender a conducir.
- Les afecta en la estimación de tamaños, distancia, reconocimiento de formas, en la orientación espacial, el tiempo que se tarda en rea-

lizar una tarea, lo que dificulta la gestión del tiempo.

- Condicionan su distinción de detalles o elementos inmersos en un todo. Por ejemplo, tienen dificultad para encontrar objetos en un escritorio desordenado; al contemplar una pintura, pueden ver el cuadro completo pero no percibir detalles importantes en él.
- Tienen limitada su capacidad para interpretar gráficos, tablas y mapas.
- Limitan su conocimiento de conceptos numéricos. Por ejemplo, la comprensión del valor de posición de las cifras de un número.

Como ocurre con la mayoría de los trastornos de aprendizaje y neurológicos, los casos cubren un amplio continuo que va desde casos leves hasta graves, y no hay dos alumnos que muestren comportamientos idénticos. En los casos graves es necesaria la intervención de un especialista; los casos leves pueden mejorar con un tratamiento adecuado del profesorado.

Los estudiantes que tienen este trastorno, de forma leve, pueden desconcertar al maestro que no haya sido informado pues se encontrará con un estudiante que es muy capaz en algunas actividades y muy poco en otras. Sus comportamientos pueden ser fácilmente malinterpretados y considerados rebeldes, mezquinos y sarcásticos; no llegan a alcanzar el tipo y la amplitud de conocimiento esperado, que sí consiguen otros estudiantes de su edad. Con frecuencia proporcionan respuestas que no tienen sentido. Su perfil de aprendizaje presenta ciertas peculiaridades, como:

- Tendencia a razonar y resolver problemas de forma oral, en voz alta.
- Mayor efectividad para aprender y recordar información escribiendo o dictando.
- Necesidad de un sistema basado en el lenguaje para organizar la información.

Sus fuertes habilidades verbales las pueden utilizar para compensar sus debilidades visoespaciales. La tabla 6.3 recoge puntos fuertes y débiles, en relación con conocimientos numéricos, que presentan en el aprendizaje estos estudiantes.

TABLA 6.3

Puntos fuertes y débiles del aprendizaje de estudiantes con dificultades en el área visoespacial

Puntos fuertes	**Puntos débiles**
• Poseer excelente atención auditiva y conocimiento fonético. • Desarrollar importantes habilidades de alfabetización, lo que les proporciona gran capacidad de procesamiento auditivo y aprendizaje de vocabulario y lenguaje. • No tener dificultades para aprender a leer hasta el momento en que las palabras que aparecen en la lectura exijan memoria visual. • Ser, a menudo, los primeros lectores de su clase. • Poder seguir presentaciones secuenciales sin ayudas visuales e instrucciones verbales o escritas de memoria.	• Tener un sentido limitado de conceptos numéricos, valor de posición, estimación. • Presentar tendencia a malinterpretar los signos numéricos. • Presentar dificultad para organizar la información numérica adecuada para producir una respuesta precisa.

ACTIVIDAD 1: Supón que has encontrado un niño de tu clase que actúa bien cuando está en un lugar fijo conocido pero al que le resulta complicado moverse de acuerdo a indicaciones, las cuales parecen dejarlo perplejo. Tampoco puede encontrar el camino de la clase al baño ni las cosas que está buscando.

Indica cómo actuarías para ayudarle en su aprendizaje.

9. EDUCACIÓN DEL PENSAMIENTO ESPACIAL

A la par que se acepta que el dominio del espacio es esencial para las personas, se aconseja que desde pequeños los niños reciban educación que les prepare para conseguir dicho dominio. Poner a los niños en disposición de que descubran las propiedades y relaciones espaciales y usen el vocabulario adecuado con comprensión es una tarea educativa. Es ingenuo pensar que las nociones espaciales se adquieren intuitivamente y sin ayuda. Es cierto que puede producirse cierto aprendizaje, pero será muy pobre. La participación reflexiva del docente es necesaria para que la empresa tenga éxito.



Figura 6.8.—Niña encajando bloques.

A la cuestión: ¿se pueden mejorar las habilidades de pensamiento espacial?, los investigadores responden que se puede conseguir, a cualquier edad, con acciones adecuadas.

9.1. Estrategias de enseñanza

Normalmente las técnicas de enseñanza se diseñan para estudiantes secuenciales-auditivos. En este caso, los conceptos se introducen paso a paso, potenciando la insistencia y la repetición. Este proceso, que puede funcionar para estudiantes secuenciales cuyo aprendizaje progresa de manera lineal, desde lo fácil hacia lo difícil, no es adecuado para estudiantes espaciales-visuales, quienes entienden los conceptos rápidamente cuando se presentan dentro de un contexto y relacionados con otros conceptos. Una vez que los estudiantes espaciales crean una imagen mental de un concepto y ven cómo encaja la información con lo que ya saben, el aprendizaje de dicho concepto se produce y se mantiene. Se aconseja modificar algunas estrategias de enseñanza para trabajar las nociones espaciales. La repetición es completamente innecesaria e irrelevante para su estilo de aprendizaje.

El trabajo sobre contenidos espaciales requiere considerar su especificidad y no tratarlos en un ambiente educativo que favorezca la respuesta correcta aprendida de memoria. El enfoque de la enseñanza sobre pensamiento espacial debe centrarse en acciones que el niño realice y la reflexión sobre dichas acciones. Exige del docente planteamiento de situaciones que inviten a los estudiantes a:

- Hacerse preguntas relacionadas con el espacio.
- Responder a las preguntas relacionadas con el espacio.
- Obtener información espacial.
- Organizar información espacial.
- Analizar información espacial.
- Resolver problemas espaciales desafiantes.

A su vez, las acciones pueden desarrollarse en diferentes ámbitos de la vida de los niños, por lo que la labor no es sólo de los maestros sino que han de involucrase los padres y otros familiares.

Los lugares pueden ser: la casa, su habitación; en el colegio, el aula habitual o lugares especiales, como sala de juegos, gimnasio, patio de recreo; en el barrio, las tiendas, edificios representativos, calles. En las acciones se utilizarán objetos propios de cada uno de los ámbitos señalados, y en su uso cotidiano.

Actividad 1: Supón que los niños juegan a hacer un puente entre dos de ellos de forma que otro pueda pasar por debajo. Escribe una batería de seis preguntas que harías a estos niños relacionadas con el pensamiento espacial.

Actividad 2: Analiza el juego de «La gallina ciega» y juzga su posible contribución al desarrollo de la habilidad espacial de los niños.

Conectar con otras áreas

Tareas propias del razonamiento espacial permiten la conexión con otras áreas de conocimiento. Como ejemplos recogemos los siguientes:

- Con el arte, algunas pinturas presentan formas geométricas que pueden ser analizadas a la vez que se contempla la obra.
- Con la geografía, leer o realizar el mapa de un territorio está asociado al estudio geográfico del mismo.
- Con la música, la conexión puede hacerse mediante canciones que traten conceptos espaciales.
- Con la expresión corporal, los movimientos organizados del propio cuerpo constituyen un medio idóneo para la exploración del espacio.
- Con el lenguaje, mediante el uso adecuado y comprensivo del vocabulario propio del espacio.
- Con la literatura, haciendo uso de retahílas cuyos conceptos principales sean elementos propios del espacio.

Actividad 3: Diseña una tarea en la que los niños de 4 años trabajen con las formas presentes en una pintura o cuadro. Describe la tarea y la manera de realizarla. Incluye algunas posibles intervenciones de los niños.

Usar materiales manipulativos y software

El uso de materiales manipulativos está presente en muchas experiencias sobre aprendizaje espacial. Estos materiales son de una gran variedad, y entre ellos podemos señalar: los materiales estructurados como bloques lógicos, tangram, geoplano, sólidos geométricos; otros materiales no estructurados; bloques para ensamblar, puzles, papel (con el que dibujar, doblar, recortar, pegar); objetos de la vida cotidiana.

Los materiales estructurados inciden más en el aprendizaje de las formas; los bloques para ensamblar, el papel y los puzles (el tangram es un puzle especial) pueden desarrollar otras nociones espaciales.

El uso de programas informáticos permite manipular formas. El entorno de software ofrece posibilidades que un entorno físico (no computacional) o manipulativo no tiene, como cambiar al instante la forma y el tamaño. En estos entornos los niños pueden personalizar sus formas, no sólo en la etapa en la que son capaces de crear modelos en tres dimensiones, sino también cuando están coloreando o haciendo garabatos.

Actividad 4: Las nuevas tecnologías ofrecen visiones panorámicas del micro y macrocosmos que permiten complementar aspectos del pensamiento espacial que van más allá de nuestros sentidos y del espacio vital en que nos movemos como seres humanos. Busca información en Internet, selecciona alguna imagen apropiada y elabora una propuesta de trabajo en el aula sobre una visión más amplia del espacio.

Actividad 5: Busca en Internet información sobre actividades a realizar en infantil: *a*) con el tangram, *b*) doblando papel para la construcción de figuras geométricas planas, como cuadrados, triángulos (entre ellos el triángulo equilátero) y figuras simétricas.

ACTIVIDAD 6: Planifica una tarea de juego con bloques de construcción que esté relacionada con el conocimiento espacial. Descríbela y señala qué otros conocimientos se pueden adquirir al realizar esta tarea. Indica la intervención del profesor en la tarea planificada.

Fomentar la percepción, la manipulación, la representación y la comunicación

Se considera que la percepción, la manipulación, la representación y la comunicación son acciones que potencian el pensamiento espacial, por lo que se recomienda que sean fomentadas por los educadores. Aunque, a continuación, las vamos a presentar separadamente, se pueden dar a la vez en una situación diseñada para el aprendizaje.

Percepción

Entendemos por percepción la sensación interior de una persona, resultado de una impresión material producida por los sentidos. Los especialistas consideran que la percepción es el primer procedimiento cognoscitivo que permite al sujeto captar la información del medio que lo rodea a través de la energía que llega a los sistemas sensoriales. La captación puede reforzarse si un agente externo interviene llamando la atención sobre cualidades de los objetos. Algunos ejemplos de actuaciones que se pueden realizar en la infancia, en diferentes ámbitos, son:

En casa con los padres:

- Al vestirse, solicitar al niño que escoja una prenda para ese día y hacerle preguntas sobre el color, insistiendo para que responda: ¿de qué color es tu «camisa»? ¿Hay algo en la habitación que también sea del mismo color? Relacionar con su ropa otros objetos de la habitación mediante otros atributos como tamaño o forma.
- Antes de ir al colegio, dejar que prepare su mochila y vigilar que meta en ella ordenadamente los objetos que va a llevar. Las preguntas aquí serían: ¿cabe en la mochila todo lo que llevas hoy?, ¿sobra o falta espacio?, ¿mucho o poco espacio?
- En el desplazamiento al colegio, probar itinerarios alternativos haciendo hincapié en cuál es más o menos largo y comparar edificios en este trayecto y entre los diferentes itinerarios.
- Si se hace una fila antes de entrar al aula, observaciones sobre si es más o menos larga conforme se van incorporando colegiales y si está o no recta.
- En juegos especialmente pensados para la percepción, por ejemplo, completar un puzle.



Figura 6.9.—Completando un puzle.

En el colegio con el profesorado:

- Hacerle observar la ubicación de cada uno de los estudiantes (por ejemplo si se hace asamblea) y también de sí mismo.
- En la sala de juegos o rincones especiales del aula, centrar la atención en las formas de los objetos que se encuentran allí. Preguntas sobre descripciones de objetos que presenten y que no presenten formas geométricas, centradas en sus atributos.
- Aprender y realizar juegos populares; las can-

ciones y relatos dramatizados son idóneos para desarrollar percepción y lenguaje espacial.

- En el gimnasio, o sala de educación física, las actividades de expresión corporal exigen movimiento y centrar la atención de los niños sobre coordenadas corporales (brazo o pierna derecha, o izquierda, salto hacia arriba, etc.).
- En el patio de recreo, observar la distribución de zonas, de distintos objetos.

Manipulación

Entendemos por manipulación la acción de actuar, con las manos, sobre los objetos. Al manipular objetos se pueden modificar cambiando su forma y creando otras nuevas. Presentamos algunos ejemplos de manipulación de objetos.

- Usar objetos reutilizables para trabajar nociones espaciales. Por ejemplo, abrir una caja de cartón grande por los extremos y convertirla en un túnel por el que los niños pueden, o no, pasar. Si el túnel se incardina en una narración, se conseguirá la actividad más atractiva.



Figura 6.10.—Niño pintando una maqueta.

También se puede convertir una caja de cartón en una casa, haciendo puertas y ventanas y colo-reando adecuadamente toda la construcción. Dilucidar quiénes pueden entrar en la casa. Estas manipulaciones ayudan a los niños a entender la relación de su cuerpo con otros objetos del espacio.

- Los bloques de construcción (para encajar), a veces de diferente tamaño y color, son útiles para que construyan figuras tridimensionales, en principio libremente y posteriormente iguales a una dada en forma, color o en ambos a su vez. Los niños de 3-4 años indican que dos formas construidas con bloques de colores son iguales si coinciden en el color, pues no se fijan en la forma. Posteriormente reparan en ella. Construir varias figuras que tengan entre sí alguna relación (por ejemplo, garaje y coches, granja y animales). Mediante la construcción de figuras tridimensionales, de acuerdo con un modelo dado y visto desde posiciones diferentes, se trabaja la perspectiva.
- Solucionar problemas espaciales, como construir estructuras elevadas para que puedan pasar debajo de ellas objetos concretos. Determinar qué cabe dentro de una estructura. Conversar con los niños sobre qué representa la forma construida, si se puede entrar en ella o no; si tiene ventanas, techo; tratar atributos mediante los que se comparen las figuras en tamaño.
- Proporcionar oportunidades de manipular formas y organizarlas de acuerdo a sus propios criterios. Posteriormente, ordenarlas siguiendo un patrón, como número de lados, o clasificarlas atendiendo a sus atributos.
- Realizar formas en cartulina o mediante el doblado de papel y pedir a los niños que describan el procedimiento seguido. Cortar las figuras de papel siguiendo algún criterio (dos partes iguales). Juntar dos formas cuidando que en algunos casos el resultado sea otra forma conocida.
- Formar figuras con el propio cuerpo, ya sea solos o con otros compañeros.

- Realizar actividades con el tangram, construcción libre de figuras indicando qué se ha construido. Más adelante, rellenar con las piezas una figura disponiendo del perfil de éstas.
- Trabajar líneas rectas y curvas, algunas abiertas, otras cerradas y otras ambas cosas. Presentar tareas en las que se trate de dilucidar cuáles son de un tipo o de otro. Por ejemplo, proporcionar cuerdas y un animalito de juguete a cada grupo para que construyan recintos con las cuerdas de donde puedan salir algunos y a otros se les impida escapar (figura 6.11).
- Jugar con laberintos. Este juego favorece las relaciones topológicas y la atención. Se aconseja que en principio sigan los caminos con el dedo y posteriormente con el lápiz. No es costoso elaborar un laberinto sencillo para educación infantil. No obstante, en Internet existen páginas con gran cantidad de laberintos para este nivel educativo (figura 6.12).
- Realizar trayectorias. Con unas cuerdas que representen caminos y algunos objetos que indiquen emplazamientos, inventar una historia que incluya puntos de partida y llegada por diferentes itinerarios (figura 6.13).

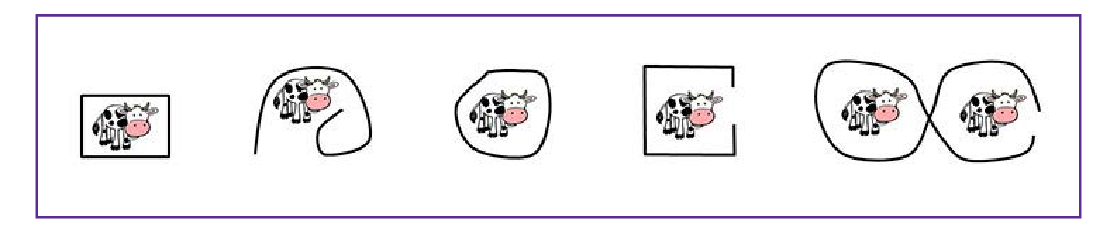


Figura 6.11.—Recintos cerrados, abiertos y ambas cosas.

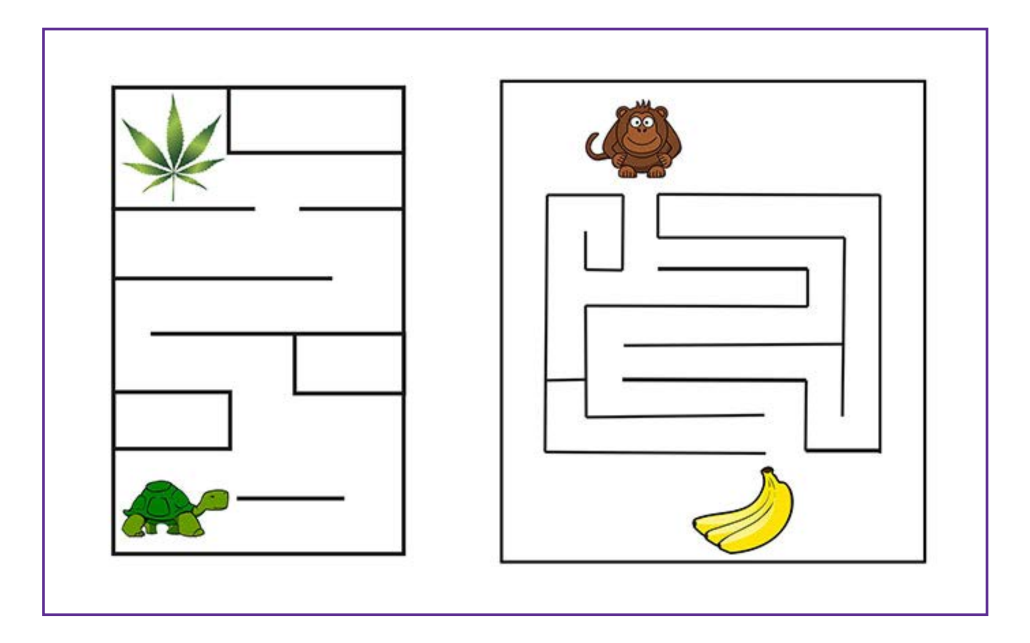


Figura 6.12.—Laberintos sencillos.

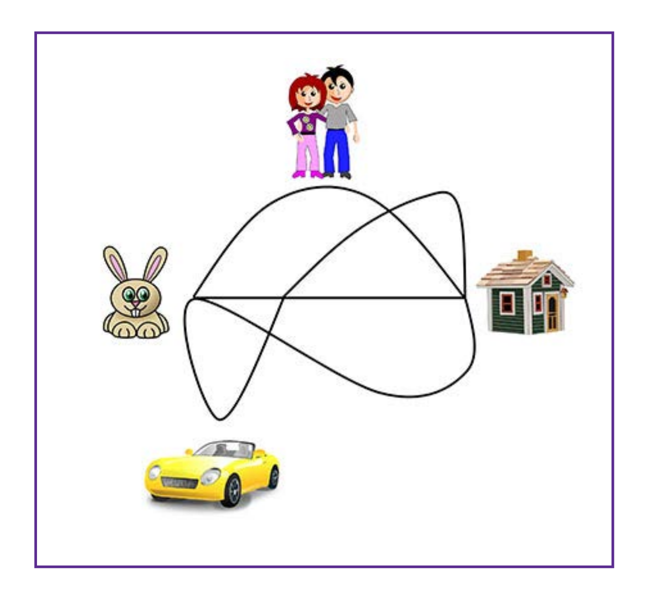


Figura 6.13.—Trayectorias con cuerdas.

- Estudiar trayectorias, o trazarlas, en una cuadrícula, comparando su longitud e indicando la dirección de los movimientos que en ellas se describen.

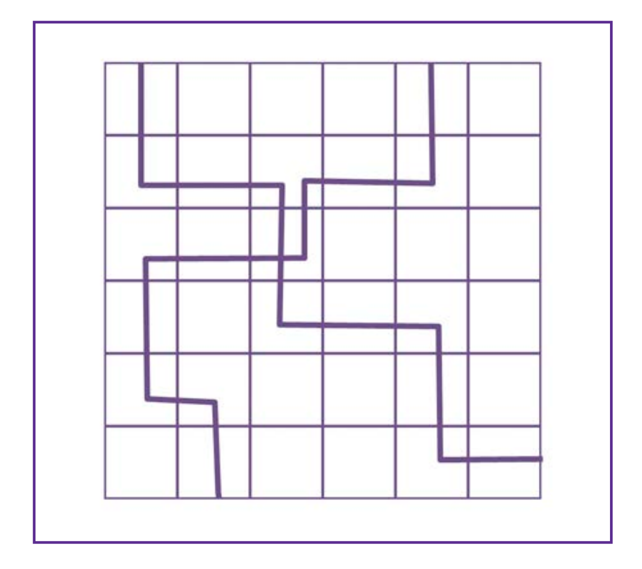


Figura 6.14.—Trayectorias en cuadrícula.

En todos los casos, dialogar con los niños sobre lo realizado, dejando que expresen sus impresiones.

Representación

Los niños ven y hacen representaciones de objetos, entre ellas formas geométricas planas y figuras simétricas. Con pocas excepciones, los textos escolares representan los triángulos, rectángulos y cuadrados en formas rígidas. Los triángulos son generalmente equiláteros o isósceles y tienen bases horizontales. La mayoría de los rectángulos son formas alargadas horizontales y con el doble de largo que de ancho. Esto puede llevar a confundirles. Posteriormente dicen que un cuadrado puesto con un ángulo hacia arriba es un rombo. Es necesario presentarles ejemplos de formas geométricas en una variedad de posiciones y tamaños, así como contraejemplos, y formas con lados curvos, que no se cierran. También es necesario que ejerciten la representación, para lo cual es necesario potenciar que hagan dibujos de todas sus actividades. Proponemos algunos ejemplos.

En el aula:

- Pueden iniciarse en la representación trazando el contorno de una forma con sus dedos y, posteriormente, con el lápiz, dibujando formas preparadas y siguiendo la línea de puntos.
- Para la representación de figuras simétricas puede ser de ayuda dibujar la mitad de una imagen (persona, casa, flor) y utilizar un espejo al borde de la mitad construida que forme un ángulo recto con el papel para que la imagen se vea completa. El uso del espejo puede producir diversión en otras tareas; por ejemplo, con una ilustración se puede ver a un personaje con dos cabezas o a otro con cuatro piernas.
- Hacer un mapa de la clase. Esta representación permite múltiples relaciones espaciales. El profesorado puede dibujar en un gran papel el recinto, indicando puertas y ventanas; los niños pueden ir colocando objetos que representen los distintos elementos que hay en el aula. En un nivel más elevado se hará la representación en el papel de los diferentes objetos. En

esta tarea se pueden introducir símbolos, y el diálogo con los escolares tratará sobre la descripción del lugar donde están las cosas en el aula y de los itinerarios para ir de un lugar a otro y sobre el significado de los signos.
- Utilizar símbolos espaciales, escritos o gestuales (a menudo se indican múltiples ubicaciones con el movimiento de las manos, la cabeza o los ojos).



Figura 6.15.—Símbolos relacionados con el deporte.

Comunicación

Ya hemos indicado que el profesorado ha de favorecer el diálogo con sus estudiantes y la comunicación entre ellos. En sus diálogos con los niños, el maestro ha de ser muy cuidadoso y utilizar el lenguaje matemático del espacio de forma adecuada; por ejemplo, dar a objetos tridimensionales su nombre correcto: de una pelota, decir que tiene forma de esfera o es esférica, de una lata de refresco decir que tiene forma cilíndrica o de cilindro, de un gorro de mago o cucurucho de helado decir que es un cono o que tiene forma cónica.

ACTIVIDAD 7: Diseñar una tarea de aprendizaje sobre la ubicación de los objetos en el espacio en la cual los escolares de 5 años ejerciten la percepción, la manipulación, la representación y la comunicación. Explica cómo se desarrollaría el proyecto.

9.2. Evaluación

Una evaluación del aprendizaje hace posible que el profesorado conozca el nivel de desarrollo de sus alumnos y adapte su intervención educativa a las posibilidades reales de cada niño. De acuerdo con lo expuesto a lo largo de este capítulo, señalamos algunas capacidades sobre las que se puede realizar la observación para una evaluación eficaz:

- Distinguir espacios completamente cerrados de espacios parcialmente cerrados en dos o tres dimensiones. Incluye la comprensión de las relaciones expresadas.
- Hacer juicios de distancia (incluye comprensión de relaciones que se expresan verbalmente, como: cerca, lejos, junto a, al lado de, sobre...).
- Mover el propio cuerpo en el espacio.
- Mover objetos relacionados entre sí con buen juicio.
- Mantener dirección y secuenciación coherentes (organizar objetos en disposición lineal exacta, extendidos o apretados, en orden inverso del original, desde una orientación distinta).
- Percibir la continuidad del espacio (varios caminos pueden llevar al mismo punto).
- Reconocer que una ruta indirecta puede llevar al mismo punto que una línea recta.
- Desarrollar rutas alternativas para llegar a una meta para sí mismo o para otro.
- Tomar desvíos alrededor de un obstáculo al alcanzar una meta (solucionar laberintos).
- Reconocer diferencias en puntos de vista desde distintas posiciones en el espacio.
- Saber situarse y situar un objeto siguiendo unas orientaciones.
- Reconocer formas simples.

Es importante que el profesorado conozca si alguno de los estudiantes muestra escasas habilidades visoespaciales. En el caso de que esto ocurra, es necesario hacer algunas modificaciones en la programación general que prepare. También es necesario considerar que los sesgos que a veces los niños presentan en su codificación de las relaciones espaciales pueden tener orígenes lingüísticos. El conocimiento

de términos espaciales y geométricos condiciona sus respuestas y acciones. Por ejemplo, respecto a los niveles en el aprendizaje de las formas, en esas edades también están aprendiendo y utilizando el conocimiento verbal. El uso del conocimiento verbal con precisión lleva tiempo y en principio puede ocasionar que las respuestas de los niños parezcan propias de un nivel inferior al que realmente están respecto a su pensamiento espacial. Los niños pueden decir que un cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro puntos y no hablar de lados perpendiculares porque aún no poseen conocimiento de la perpendicularidad.

Actividad 8: Diseña una situación cuyo desarrollo pueda servir de evaluación espacial para niños de 5 años. Describe el desarrollo de la situación y las capacidades que se pretende observar en los escolares.

9.3. Tratamiento de dificultades

Si se percibe que algún niño presenta retraso en las capacidades visoespaciales, es conveniente seguir una serie de pautas como:

- Enfatizar la manipulación y el movimiento corporal.
- No forzar al estudiante a utilizar estrategias visuales y reducir el énfasis en las presentaciones basadas en lo visoespacial que conllevan dibujos, diagramas y gráficos, que le producen confusión.
- Proporcionar tiempo adicional para que el estudiante realice sus tareas.
- Aumentar el énfasis en el lenguaje para explicar conceptos y procedimientos y brindar apoyos verbales mediante instrucciones.

En los casos leves, las habilidades visoespaciales se pueden mejorar trabajando en ellas desde la infancia, con mucha práctica. Algunos consejos que se dan para su tratamiento indican que cuando los estudiantes muestren dificultad para establecer relaciones entre los objetos que ven, es conveniente trabajar para fortalecer sus capacidades perceptivas. Requiere proporcionarles experiencias motivadoras y de interés para que se impliquen en ellas. Comenzar con tareas muy sencillas y pasar gradualmente a otras más complejas. Las tareas deben potenciar la capacidad de dar sentido a lo que se ve. Si el docente percibe en algún escolar la necesidad de mejorar su pensamiento visoespacial, es necesario que le proponga tareas de búsqueda de objetos proporcionándole pistas. En principio los objetos serán fácilmente localizables y la búsqueda se irá complicando de manera gradual, introduciendo lugares más alejados y objetos menos accesibles. Los contextos para estas actividades han de proporcionar una alta motivación. Se aconseja dividir las tareas largas en una serie de tareas más cortas para que el estudiante pueda lograr el éxito en cada una de ellas y no se sienta frustrado.

Actividad 9: En un libro de trabajo para segundo ciclo de educación infantil, analiza las tareas propias del espacio. Céntrate en la cantidad, variedad, potencia y atractivo de las tareas.

Actividad 10: Analiza si estas tareas son aptas para un niño con problemas de visualización. En el caso de que alguna no lo sea, adapta al menos dos.

10. EJERCITA TU APRENDIZAJE

Actividad 1: Elabora una trayectoria de aprendizaje centrada en las formas geométricas planas más sencillas.

Actividad 2: Diseña tres tareas para la trayectoria que has elaborado que tengan diferente grado de dificultad.

Actividad 3: Propón una situación de aprendizaje en la que se trabaje la representación y se utilicen

códigos para plasmar ideas. Indica objetivos, forma de trabajar y características de los sujetos a los que va dirigida la situación. (Pista: los símbolos no han de ser necesariamente escritos.)

ACTIVIDAD 4: Selecciona fotografías y elabora una actividad con este recurso en la que se trabaje algún criterio de clasificación o agrupamiento relacionado con el pensamiento espacial.

ACTIVIDAD 5: Busca y selecciona algunos poemas, cuentos o canciones relacionados con el pensamiento espacial.

ACTIVIDAD 6: Supón que una maestra de educación infantil ha sacado a su alumnado de 5 años a jugar con un balón al patio de recreo. En el juego, quien posea el balón ha de mandarlo al niño que indique la maestra, que, a su vez, dirá dónde se encuentra este niño (derecha o izquierda) con respecto al poseedor del balón. Cuando se produce un fallo, el turno de lanzar el balón pasa a quien está a su derecha. Analiza el juego e indica justificadamente qué potencial presenta para trabajar alguna relación espacial.

ACTIVIDAD 7: Google es un recurso útil que ofrece nuevas posibilidades para representar el espacio e interactuar con él. La aplicación Google-Maps permite trabajar el espacio a diferentes escalas en tiempo real. Localiza la escuela donde estudiaste y visualiza las calles en 3D de su entorno. Localiza algún monumento emblemático de tu ciudad. Justifica cómo se podría usar este recurso en un aula de infantil.

ACTIVIDAD 8: Imagina que eres responsable de una clase de escolares de 5 años que va a salir de excursión para conocer el barrio donde se ubica el colegio. Diseña tu actuación para dicha salida de manera que durante ella se potencie la percepción, la manipulación, la representación y la comunicación espacial.

ACTIVIDAD 9: Cine, arte y literatura constituyen recursos de interés para el trabajo globalizado y el desarrollo del pensamiento espacial. Selecciona algún fragmento literario, escultura o película y elabora una propuesta de trabajo en el aula.

ACTIVIDAD 10: Programa un juego sobre la búsqueda de un objeto escondido o de un tesoro. Indica las capacidades espaciales que se pueden potenciar con este juego.

ACTIVIDAD 11: Busca información sobre los siguientes juegos: juego del espejo, juego de las estatuas, juego «Explico lo que toco», juego «Cada cosa en su lugar». Analízalos tomando como referencia los elementos de conocimiento espacial. Indica si son adecuados para niños de infantil.

ACTIVIDAD 12: Algunos museos disponen de simuladores de visitas virtuales en 3D que permiten recorrer espacios culturales, exposiciones y monumentos desde el ordenador, el teléfono móvil, una tableta y las aplicaciones móviles. Hay visitas adaptadas para niños. Indaga en las direcciones siguientes y comenta la posibilidad de usarlas con niños de infantil. En caso de usarlas, indica cómo lo harías.

Museo del Prado: http://www.museodelprado.es/pradomedia/multimedia/audioguias-infantiles/.
Alhambra: http://viewer.spainisculture.com/hdimages/Alhambra/index.html?lang=es.
Museo del Louvre: http://es.photojpl.com/visita-virtual-interactiva-del-museo-del-louvre-en-par%C3%ADs/-/VHxYkV50En/.
Capilla Sixtina: http://www.vatican.va/various/cappelle/index_sistina_en.htm.

ACTIVIDAD 13: Diseñar un proyecto para realizar con niños de 3-4 años en el que intervengan las nociones espaciales que hemos presentado en este capítulo.

7
Números y operaciones

ELENA CASTRO-RODRÍGUEZ
MARÍA C. CAÑADAS

Abuela: *¿Cuántas galletas han quedado en el paquete?*
Leo (4 años, 1 mes): *Papá se ha comido las dos galletas que yo he dejado. Ahora quedan cero.*



Figura 7.1.—Juego balanza de números.

El bloque temático de números y operaciones tiene una estrecha relación con el resto de bloques que se trabajan en educación infantil. Por ejemplo, se relaciona con los bloques de lógica y medida. En lógica, cuando se establece el orden de un conjunto de tres objetos según un atributo cuantitativo, se asigna a cada uno de ellos un número de la secuencia ordinal para indicar que uno es el primero, otro el segundo y otro el tercero. En medida, el resultado de una medición es un número junto a una unidad de medida.

Desde los primeros niveles educativos, los números se utilizan para la realización de operaciones, entre otros usos. Los números y las operaciones tienen entidades distintas desde el punto de vista matemático pero son contenidos estrechamente relacionados.

1. NÚMERO NATURAL

El término «número natural» se refiere a un concepto; es una abstracción a la que se le atribuyen distintos significados. En este apartado presentamos cómo surgió la necesidad del número natural e introducimos los aspectos cardinal y ordinal de esta noción que a lo largo del capítulo denominaremos «número». Además, recogemos diferentes formas de expresar un número a través de sus representaciones.

1.1. Correspondencia

Con el nacimiento de la agricultura y la ganadería, los hombres necesitaban recordar exactamente cuántos objetos o animales poseían. Para guardar registro de ello, utilizaron piedras, marcas en palos o nudos en cuerdas. Cada piedra, marca o nudo se correspondía con un objeto o animal. Por ejemplo, un pastor, para saber las ovejas que tenía, ponía una piedra por cada animal en un lugar determinado. Luego, en otro momento, para saber si seguía teniendo el mismo número de ovejas, hacía corresponder cada oveja con cada una de las piedras recogidas. Si coincidía la cantidad de ovejas con la de piedras, todo iba bien; pero si sobraba alguna piedra, que no había podido emparejar con oveja alguna, significaba que le faltaban ovejas.

Así, como consecuencia de la necesidad de conocer cuántos objetos hay en una determinada colección, y mediante la correspondencia o emparejamiento de elementos de dos colecciones o conjuntos (en el ejemplo, los conjuntos son las ovejas y las piedras), el hombre comenzó a aproximarse al concepto de número a través de su uso cardinal.

En la acción de emparejar dos colecciones se establece una correspondencia de manera que a cada elemento de una de ellas se le asocia uno y sólo uno de la otra colección. En matemáticas esta correspondencia se denomina «aplicación biunívoca» o «biyectiva». Formalmente, se dice que entre dos conjuntos o colecciones se puede establecer una aplicación biunívoca (o biyectiva) cuando sus elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno, esto es, emparejarse sin que queden elementos de alguna de las dos colecciones sin pareja.

Una situación análoga es el establecimiento de la correspondencia entre los términos de la secuencia convencional numérica (uno, dos, tres, etc.) y la colección de objetos cuyo cardinal se quiere averiguar.

ACTIVIDAD 1: Señala dos acciones cotidianas en las que se emparejen colecciones de objetos.

1.2. Cardinal

El cardinal se define como el número de elementos que tiene un conjunto. Todos los conjuntos o colecciones finitas de objetos entre los que es posible

lograr un emparejamiento tienen el mismo número de elementos o igual cardinal. En ese caso se dice que los conjuntos son coordinables entre sí. La noción de número natural surge de la abstracción de la idea de que todos los conjuntos coordinables tienen el mismo cardinal. En las figuras 7.2 y 7.3 se muestran dos conjuntos de objetos coordinables y un posible emparejamiento de sus objetos.

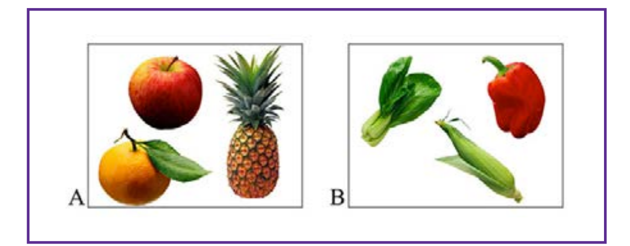


Figura 7.2.—Conjuntos de objetos coordinables.

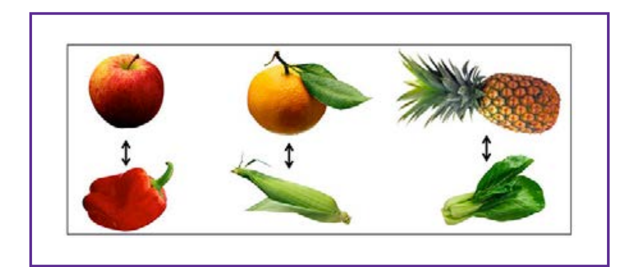


Figura 7.3.—Emparejamiento de los objetos.

1.3. Ordinal

El aspecto ordinal de los números está basado en la idea de sucesión. Cada número se relaciona con su anterior y posterior. Por ejemplo, tres va después que dos pero antes que cuatro. Esto se observa en el propio recitado de la secuencia numérica, en la que se dice el número menor antes y el número mayor después. Entre dos números naturales se pueden dar dos relaciones de orden: ser menor que o ser mayor que. Estas relaciones permiten ordenar los números y ayudan a la memorización y al uso de la secuencia numérica convencional.

Actividad 2: Escribe el número más pequeño de cuatro cifras. Escribe cuáles serían el anterior y el posterior a ese número.

1.4. Representaciones de los números

Como hemos mencionado anteriormente, la idea de número es un concepto, una abstracción. Dicho concepto se puede expresar a través de diferentes representaciones. «Tres», «3», «III» o el punto 3 marcado sobre la recta numérica (véase figura 7.4) son diferentes formas de expresar el número tres utilizando distintas representaciones.

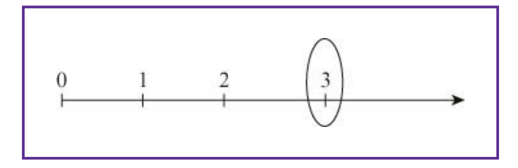


Figura 7.4.—Representación del número tres en la recta numérica.

Es usual confundir la noción de «número tres» con el símbolo «3», si bien el símbolo sólo es una forma de representar el número. Todos y cada uno de los conjuntos finitos tienen asociado un valor numérico que se corresponde con la cantidad de objetos que los componen y que puede representarse mediante un símbolo o un nombre. En la figura 7.5 mostramos ejemplos para conjuntos de uno, dos y tres objetos.

Conjunto	Símbolo	Nombre
	1	Uno
	2	Dos
	3	Tres

Figura 7.5.—Símbolo y nombre de conjuntos de uno, dos y tres objetos.

En general, cada representación permite destacar unas propiedades, nociones o procedimientos de los números. Cada representación tiene sus propios elementos y sus propias reglas de combinación y utilización de éstos. A continuación exponemos diferentes representaciones que resultan útiles para el trabajo de los números en educación infantil.

Representación verbal

Insistimos en que los números son ideas o conceptos. Las palabras numéricas o términos son los nombres que damos a cada uno de los números (uno, dos o tres, como se observa en la figura 7.5). Esto responde a una representación verbal de los números. En el aspecto ordinal los términos primero, segundo, tercero, etc., también forman parte de una representación verbal.

Representación simbólica

Los diez elementos básicos del sistema decimal de numeración: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, conocidos como dígitos, están expresados mediante una representación simbólica indoarábiga; debidamente combinados, permiten escribir cualquier número en este tipo de representación. A la expresión de un número utilizando estos símbolos se la conoce como su numeral. Así, 7, 18 o 35 son numerales. Al hacer la distinción entre numeral y número se trata de diferenciar que en el primer caso se está tratando sólo de su representación, y en el segundo caso, del concepto de número correspondiente.

Existen otras formas de representar simbólicamente los números, y por tanto otros numerales; es el caso por ejemplo del sistema de numeración romano (I, V, X, etc.).

Representación gráfica

La recta numérica o las configuraciones puntuales (las caras de un dado son un ejemplo de configuración puntual) ofrecen otra forma de plasmar los números a través de representaciones gráficas. En la figura 7.6 mostramos los números cuadrados a través de configuraciones puntuales.

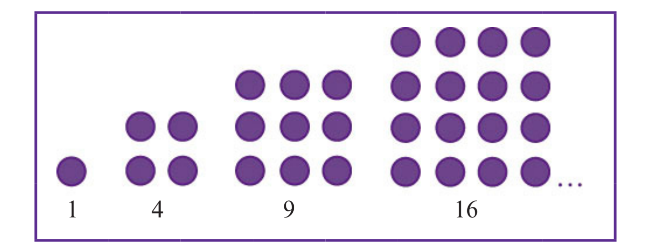


Figura 7.6.—Números cuadrados.

Representaciones manipulativas

Los recursos o materiales como las regletas de Cuisenaire, las plaquetas de Herbinière-Lebert o el ábaco son representaciones manipulativas de los números. Algunas propiedades de los números son fáciles de identificar a través de diferentes recursos manipulativos. Por ejemplo, los números pares e impares se pueden reconocer en las plaquetas o regletas de Herbinière-Lebert: son aquellos que en la plaqueta presentan todos los puntos con su pareja o aquellos que tienen un punto sin pareja, respectivamente (véase figura 7.7). Sin embargo, esta noción no es evidente en otros materiales como el ábaco o en el sistema decimal de numeración.

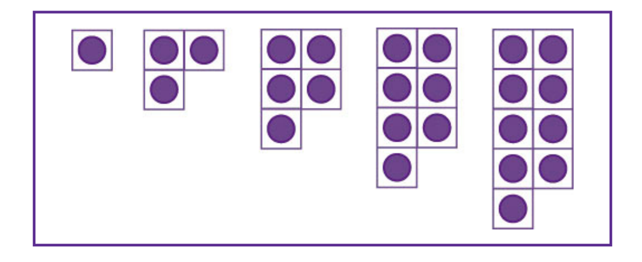


Figura 7.7.—Números impares en las plaquetas de Herbinière-Lebert.

ACTIVIDAD 3: Analiza los tipos de representaciones involucradas en las canciones: Un elefante se columpiaba en los hilos de una araña, La gallina turuleta, El uno es un soldado haciendo la instrucción.

ACTIVIDAD 4: Busca información sobre los bloques multibase y realiza un informe con una extensión máxima de un folio. Incluye una representación con los bloques multibase de los números 7, 12 y 123.

2. USOS O CONTEXTOS DEL NÚMERO

En la vida cotidiana los números se utilizan en diversas situaciones. Entre ellas destacamos cinco contextos que constituyen los cinco usos que se hacen del número: *a*) secuencia numérica, *b*) cardinal, *c*) ordinal, *d*) medida y *e*) etiqueta.

2.1. Secuencia numérica

Los términos uno, dos, tres, cuatro, etc., constituyen la secuencia numérica convencional. La secuencia numérica es necesaria en la acción de contar, pero también se puede utilizar sin darle ningún significado a los términos, por ejemplo, en una retahíla aprendida de memoria. Este uso de la secuencia numérica se observa cuando los niños juegan al escondite y uno recita hasta el 50 para que los demás se escondan. En este caso, se trata de dar una pauta que mediría un tiempo, aquel que se proporciona para que los participantes en el juego se escondan. Otro ejemplo lo ofrece la siguiente cantinela.

«Uno, dos, tres y cuatro,
Margarita tiene un gato.
Que le da de merendar.
Pan y chocolate, chocolate y pan.»

En este caso, los términos de la secuencia proporcionan una rima a la letra de la canción.

2.2. Cardinal, ¿cuántos hay?

Hemos indicado anteriormente que se conoce como cardinal de una colección a la cantidad de elementos que tiene. Se hace un uso del número como cardinal cuando expresa la cantidad de elementos que hay en un conjunto finito. Por ejemplo, en los enunciados «en la clase hay trece alumnos» y «quedan trece bombones en la caja», el número trece indica el cardinal o número de alumnos tanto de la clase como de la caja de bombones.

2.3. Ordinal, ¿qué posición ocupa?

Un número adquiere un uso ordinal cuando expresa la posición (relativa) de un elemento en un conjunto. Por ejemplo, al tomar un número del expendedor de una tienda, la persona que tenga el uno será la primera en ser atendida; la que tenga el dos será atendida en segundo lugar, y así sucesivamente. En este caso, los números expresan el orden en que los clientes serán atendidos.

El aspecto ordinal del número procede de la idea de ordenar. Ordenar los números es el proceso de determinar cuál de dos números es mayor que el otro.

En estas situaciones de uso, el número generalmente va asociado a los términos primero, segundo, tercero, etc., e indica la posición de un elemento en una colección respecto al resto. También se puede hablar de la secuencia ordinal, que está compuesta por los términos «primero, segundo, tercero, etc.». A diferencia del uso cardinal, para el ordinal es fundamental establecer un elemento de referencia y una organización de los objetos. Por ejemplo, en una fila de coches que van a ser aparcados, pudiera ser necesario conocer si comenzar a hacerlo por la izquierda o por la derecha.

ACTIVIDAD 1: Identifica dos situaciones de la vida real en la que se suelen ordenar colecciones (objetos, personas).

2.4. Medida, ¿cuánto mide?

En el uso del número en la medida, éste describe la cantidad de unidades de alguna magnitud con-

tinua, como longitud, superficie, peso, tiempo, etc. El resultado de medir se expresa mediante un número y la unidad de medida. El número indica las veces que la unidad está contenida en la cantidad de magnitud que se mide. Por ejemplo, se dice que el lado de la mesa mide 14 palmos: esto significa que el palmo cabe catorce veces en el largo de la mesa.

2.5. Etiqueta o código, ¿cuál es su código?

En el uso de código o etiqueta, los símbolos de los números se utilizan con el fin de distinguir o diferenciar elementos de una colección. El número del dorsal de un equipo de fútbol, el DNI o la matrícula de los automóviles son ejemplos en los que el número adquiere un uso de etiqueta.

Actividad 2: Analiza las frases siguientes e indica, para cada caso, el uso que se hace del número en ellas: «la nota 5 corresponde al aprobado», «vivo en la planta 16», «el número premiado en el sorteo ha sido el 12035», «el código de barras es 3271», «el palacio tiene 43 habitaciones», «el número que más me gusta es el 25».

Actividad 3: Elige tres canciones infantiles en las que aparezca la noción de número y analiza el uso del número que se puede trabajar con ellas en el aula de educación infantil.

3. CUANTIFICAR

Cuantificar significa dar respuesta a la pregunta «¿cuántos hay?». Subitizar, estimar, contar y emplear las operaciones matemáticas son los principales métodos que se utilizan para cuantificar. Cualquiera de estas formas permite decir la cantidad de elementos que hay en una colección o la cardinalidad de esa colección. En ocasiones, se pueden utilizar dos o más de estas formas, de manera combinada, para decir dicha cantidad de objetos.

3.1. Subitizar

Subitizar consiste en saber cuántos elementos hay en una colección de forma rápida, con un «vistazo» o «golpe de vista». Cuando observamos la cara superior de un dado después de haberlo lanzado, sabemos cuál es la puntuación obtenida simplemente con mirar. Hay dos tipos de subitización:

a) Subitización perceptiva.
b) Subitización conceptual.

En la primera, se perciben los elementos de la colección intuitivamente y a la vez; por ejemplo, reconocer que la cara superior de un dado tiene seis puntos se considera una subitización perceptual porque se capta con un golpe de vista. Igualmente ocurre con un paquete de cuatro yogures. La figura 7.8 muestra estas dos situaciones.



Figura 7.8.—Ejemplos de subitización perceptual.

En la subitización conceptual no se perciben todos los elementos a la vez pero su organización permite decir cuántos hay. Por ejemplo, al visualizar las caras superiores de dos dados, una con cuatro puntos y otra con seis, podemos decir que hay diez puntos (véase imagen izquierda figura 7.9). Si tenemos dos paquetes de cuatro yogures cada uno, podemos concluir de forma rápida que tenemos ocho yogures (véase imagen derecha de la figura 7.9). En estos dos casos, se considera que se utiliza la subitización conceptual. Este tipo de subitización implica el uso de la subitización perceptual y la utilización de la composición o descomposición de números.



Figura 7.9.—Ejemplo de subitización conceptual.

La subitización conceptual se considera precursora de la aproximación por composición o descomposición numérica a la suma y a la resta.

La subitización permite introducir ideas básicas relacionadas con la cantidad, como «cuántos», «más» o «menos». El número de elementos que tenga una colección influye en la dificultad que supone la tarea de subitizar; así, en un dado dodecaedro, no será fácil distinguir a simple vista los doce puntos que aparecerán en una de sus caras.

3.2. Estimar

Realizamos una estimación numérica cuando pretendemos responder de forma aproximada, sin contar, a preguntas sobre la cardinalidad de un conjunto. Por ejemplo: ¿cuántas uvas hay en un racimo? o ¿cuántas personas había en la manifestación?

La estimación es algo más que adivinar. Requiere pensar en la numerosidad y poner en práctica alguna estrategia que permita acercarse tanto como sea posible al cardinal de la colección considerada. Se distinguen diferentes tipos de estimación. En este capítulo abordamos aquellos tipos que tienen que ver con los números y las operaciones, y entre los que se suele distinguir: *a*) estimación de la numerosidad, *b*) estimación en la recta numérica y *c*) estimación operatoria.

La estimación de la numerosidad se refiere a la habilidad de estimar visualmente el número de elementos de una colección. Por ejemplo, un día cualquiera de clase en la universidad puedes estimar el número de estudiantes que hay en el aula. Otro ejemplo es estimar el número de manzanas que hay en una caja de fruta (figura 7.10). En el caso de números pequeños, la estimación de la numerosidad coincide con la subitización.

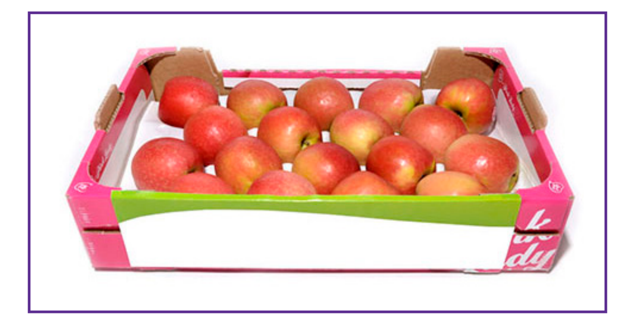


Figura 7.10.—Caja de manzanas.

La estimación en la recta numérica se basa en una representación que se realiza de los números en una recta, como en el ejemplo que mostramos en la figura 7.11, donde el número 1 se ha borrado y es necesario dibujarlo en el lugar que le corresponde en el segmento representado.



Figura 7.11.—Estimación de la representación de 1 entre 0 y 2.

La estimación operatoria requiere el manejo de conceptos numéricos y operatorios. Siguiendo el ejemplo mencionado de las manzanas, podemos estimar el número de ellas que caben en varias cajas de igual tamaño y sumarlo tantas veces como requiera el número de cajas o multiplicarlo por éste.

Actividad 1: Realiza una estimación del número de estudiantes que tiene el centro donde realizas actualmente tus estudios. Explica el tipo de estimación que usas.

3.3. Contar

Contar es un procedimiento en el que se asignan los nombres de los términos de la secuencia

numérica convencional (uno, dos, tres, etc.) a cada uno de los objetos de una colección. Se trata de establecer una relación biyectiva entre los términos de la secuencia numérica y los objetos. Inicialmente, se produce un apareamiento entre cada término y cada objeto de la colección, mediante la acción de señalar.

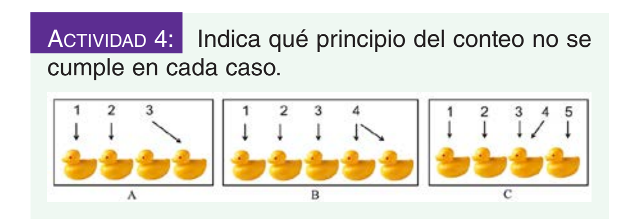
Para que el proceso de contar sea exitoso y se llegue al resultado correcto, es necesario cumplir unas normas o principios. Éstos son los siguientes:

- *Principio de orden estable*. Los términos de la secuencia numérica convencional deben ser recitados comenzando por el uno y en el orden establecido. No se obtendrá el resultado correcto si se comienza por cero o si se utiliza otro orden. Por ejemplo, si se pretende conocer la cantidad de dedos que hay en una mano, no se obtiene el resultado correctamente si los números se recitan en el siguiente orden: 1, 8, 4, 5, 2, ni en cualquier otro que no sea el convencional (1, 2, 3, 4, 5).
- *Principio de correspondencia*. A cada objeto de una colección se le debe asignar un único término de la secuencia convencional numérica (un mismo objeto no puede tener asignados dos términos). Siguiendo con el ejemplo de los dedos de una mano, se incumple este principio si se empieza a contar por el meñique y, asignándole uno, se recorren todos los dedos y se termina en el mismo meñique asignándole el término seis. En este caso, al meñique se le han asignado dos términos numéricos, uno y seis.
- *Principio de biunivocidad*. En sentido contrario a lo expresado en el principio anterior, cada término de la secuencia numérica debe ser asignado a un único objeto. Este principio, junto con el anterior, implica que la correspondencia que se establece entre objetos y palabras numéricas ha de ser uno a uno. Se incumple este principio cuando algún término se asigna a dos objetos. Si se trata de contar los dedos de las dos manos y éstos se señalan con rapidez, puede ocurrir que alguna de las palabras indicadas abarque dos dedos (u objetos), llevando a error.
- *Principio de cardinalidad*. El último término recitado se corresponde con la cardinalidad de la colección, es decir, con el número de objetos de la colección. Este principio implica que se identifique el último término de la secuencia numérica con la cantidad de objetos de la colección. En el caso del conteo de los dedos de una mano, cuando se recita el cinco, ése debe ser el término que se considere resultado del conteo.
- *Principio de irrelevancia de orden*. El cardinal de una colección no depende del orden en el que se tomen los objetos al contarlos. Al contar los dedos de la mano, el resultado no queda afectado por el orden del recorrido. Por ejemplo, el conteo de los dedos de una mano se puede comenzar desde el dedo pulgar, el del corazón o el meñique.
- *Principio de abstracción*. Cualquier colección de objetos es contable. Los elementos del conjunto pueden ser homogéneos (manzanas) o heterogéneos (manzanas y peras de diferentes tamaños). En el caso de colecciones heterogéneas, el resultado de contar se expresa en una categoría superior que contenga las dos anteriores (frutas, por ejemplo, si se pretende contar una colección en la que hay manzanas y peras, independientemente de que sean frutas diferentes o tengan distintos colores o tamaños).

Actividad 2: Indica en qué difieren el principio de irrelevancia de orden y el principio de orden estable. ¿Crees que son contradictorios?

Actividad 3: Un juego engañoso consiste en contar los dedos de las dos manos cantando de la siguiente forma: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, sie, te, ocho y nueve. Con ello resultan nueve dedos entre las dos manos. ¿Qué principio del conteo se incumple?

Actividad 4: Indica qué principio del conteo no se cumple en cada caso.



3.4. Operar

Si disponemos de la información suficiente, el cardinal de un conjunto puede hallarse empleando operaciones elementales y aplicando sus propiedades. Así, conocido el cardinal de una parte del conjunto (la mitad de la clase son doce niños), podemos hallar el cardinal de éste (el doble de doce). Otro ejemplo es el caso de los envases de huevos. Cada envase tiene seis huevos, por lo que si compramos tres envases sabemos el total de huevos realizando una multiplicación, lo cual es más fácil que contar los huevos uno a uno.

Actividad 1: Identifica disposiciones de objetos que permitan decir la cantidad exacta que hay sin necesidad de contarlos y justifica en cada caso cómo determinar el cardinal.

4. SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

Un sistema de numeración está constituido por un conjunto finito de signos y reglas que hacen posible representar cualquier número mediante el uso del conjunto finito de signos de acuerdo con dichas reglas. El sistema de numeración por excelencia en nuestra cultura es el sistema de numeración decimal, ya sea oral o escrito.

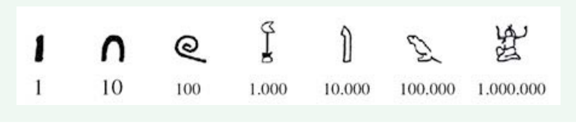
4.1. Principios del sistema de numeración decimal

Existen unos principios que caracterizan y organizan el sistema de numeración decimal. Dichos principios son los siguientes:

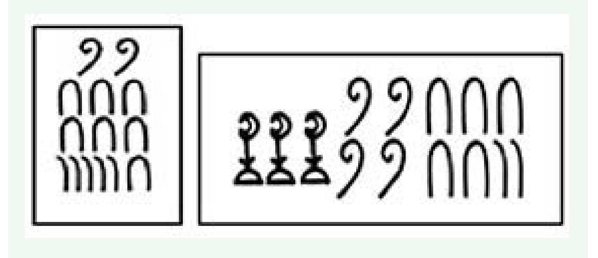
- *Base diez*. Cada diez unidades de un orden constituyen una unidad de orden superior. Por ejemplo, diez unidades equivalen a una decena.
- *Uso del cero*. El cero indica la ausencia de unidades en el lugar del orden donde esté y la existencia de dicha posición. Así, en el número 103, el 0 indica ausencia de decenas y mantiene el lugar de las decenas.
- *Aditivo*. El valor que representa un número es igual a la suma de las cifras teniendo en cuenta su valor de posición. Por ejemplo, 25 es la suma de dos decenas y cinco unidades.
- *Multiplicativo*. Existe una forma de indicar la presencia de más de una unidad de un orden determinado sin necesidad de repetición. Cada cifra del número es un factor que multiplica a una potencia de diez. Por ejemplo, 25 equivale a 2×10^1 y 5 es 5×10^0. Por tanto, $2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.
- *Posicional*. El valor de las cifras de un número depende de su posición en él. Por ejemplo, el valor del 2 es diferente si está en el lugar de las decenas que si está en el lugar de las unidades.
- *Orden en la posición*. Las cifras se colocan de derecha a izquierda, siguiendo un orden ascendente, de forma que la cifra de la derecha es la de menor valor (unidades), que aumenta en según vamos hacia la izquierda.

Actividad 1: Se puede pensar que como el cero no tiene valor, se debe suprimir de los números de más de una cifra. Razona sobre lo incorrecto de este pensamiento. Si te parece más cómodo, ayúdate de algún número que tenga ceros, como 307.

Actividad 2: La figura siguiente representa el valor de los signos numéricos del sistema de numeración egipcio.



En este sistema de numeración, las potencias de diez se representaban con elementos simples, como indica la figura, y los números compuestos se obtenían por repetición de los símbolos simples. Se tomaban tantos símbolos simples cómo fueran necesarios, sin repetir ninguno más de nueve veces, y se escribían indistintamente de izquierda a derecha, de arriba abajo y también cambiando la orientación de los símbolos.
Escribe en sistema decimal los dos números representados a continuación.



ACTIVIDAD 3: Describe los principios del sistema de numeración decimal que cumplen los bloques multibase.

4.2. Sistema decimal de numeración oral y escrito

Las representaciones del sistema de numeración decimal oral y escrito, con cifras indoarábigas, presentan características diferentes.

El sistema decimal de numeración oral está compuesto por los términos que constituyen la secuencia numérica convencional. Los dieciséis primeros términos tienen cada uno un nombre (del cero al quince). A partir de estos términos, con la introducción de ocho términos más (veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa), y conociendo las normas de combinación, es posible nombrar desde el número dieciséis hasta el noventa y nueve. Por ejemplo, combinando el diez con el ocho, se obtiene el dieciocho; combinando el treinta con el siete, se obtiene el treinta y siete.

En el sistema escrito de numeración con presencia de las cifras indoarábicas se utilizan los numerales procedentes del sistema de numeración indoarábigo. Está compuesto por diez símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) a partir de los cuales se forman todos los números.

ACTIVIDAD 4: Reflexiona sobre las ventajas que proporciona un sistema de numeración. Puedes ayudarte pensando cómo sería nombrar o escribir los números si no existiese sistema alguno.

4.3. Notaciones simples y compuestas

Las notaciones numéricas simples son las diez cifras, o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Todos los posibles números se forman combinando estos símbolos simples. Los números que siguen al 9 se forman combinando el 1 con el resto, desde el 0 (10) hasta el 9 (19). A partir del 19, se cambia el 1 por el 2 y se vuelve a repetir el proceso.

Históricamente, el cero fue el último dígito que se incorporó al sistema de numeración debido a que se asociaba la idea de número con la existencia de objetos, y los números expresaban lo existente. El cero, con este significado, no tiene razón de ser. De hecho, el cero no tiene significado en la mayoría de contextos numéricos. Destacamos las siguientes ideas sobre el cero en diferentes contextos:

- La secuencia numérica convencional no suele comenzar con cero.
- En el conteo, no se emplea el cero.
- En el contexto cardinal sólo tiene cabida si lo utilizamos para expresar el cardinal de una colección sin objetos (conjunto vacío).
- En el contexto de medida tiene escasa utilidad.
- En el contexto ordinal, sólo en algunos casos, el primer puesto se le asigna al cero (ejemplo, curso cero para indicar que es anterior al primer curso).

ACTIVIDAD 5: Escribe una frase en la que se incluya el cero para cada uno de los contextos en que no es natural su uso y ejemplifica este hecho.

4.4. Órdenes de unidades

La representación simbólica de los números puede estar constituida por una o más de una cifra o dígito. La posición u orden de cada cifra recibe un nombre específico: unidad, decena, centena, millar, etc. En 142, la cifra 2 indica dos unidades, la cifra 4 indica cuatro decenas y la cifra 1 indica una centena. Cada diez unidades de un orden forma otra unidad de orden superior. Así, la centena se puede ver como diez decenas o como cien unidades.

Por tanto, hacer grupos de diez elementos se considera una forma de introducir el razonamiento que es necesario llevar a cabo en base diez en nuestro sistema decimal de numeración.

ACTIVIDAD 6: Leer los números siguientes como unidades, como decenas y como centenas: *a*) 453, *b*) 85.253 y *c*) 6.437.321.

5. SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANO

Es necesario estar familiarizado con el sistema escrito de numeración romano, fundamentalmente para la lectura de cierta información (véase figura 7.12).



Figura 7.12.—Contextos cotidianos en que se observan números romanos.

En la numeración romana existen siete signos iniciales, que se corresponden con letras mayúsculas de nuestro alfabeto: I, V, X, L, C, D y M. Hay unas reglas que permiten la combinación de estas cifras para representar los números:

- I, X, C y M se pueden escribir hasta tres veces consecutivas (no más de tres).
- V, L y D sólo se pueden escribir una vez.
- Cuando un símbolo está a la izquierda de otro mayor, lo resta; y si está a la derecha, lo suma.
- Para números iguales o superiores a 4.000, se pone una línea horizontal encima del número para indicar que el número queda multiplicado por 1.000.

ACTIVIDAD 1: Para los números romanos que aparecen a continuación, escribe su equivalente en el sistema de numeración decimal: MCCIII, CLIV, MCDLI.

ACTIVIDAD 2: Escribe con símbolos romanos los números equivalentes a: 47, 379, 2016.

6. OPERACIONES ARITMÉTICAS: ESTRUCTURA ADITIVA Y MULTIPLICATIVA

En las matemáticas escolares, se denomina «estructura aritmética» a un conjunto de números en los que hay definidas operaciones aritméticas. Estas operaciones cumplen unas propiedades y con ellas se puede abordar un amplio campo de problemas.

En la aritmética de los números naturales destacan dos estructuras: la aditiva, que engloba las operaciones de adición (suma) y sustracción (resta), sus propiedades y el campo de problemas que resuelve, y la multiplicativa, que abarca las operaciones de multiplicación y división, sus propiedades y el campo de problemas que resuelve. En este apartado describimos ambas estructuras, la aditiva y la multiplicativa, atendiendo a sus concepciones o significados y a sus propiedades. Ambas estructuras tienen su inicio en educación infantil, cuando comienza a formarse tanto el pensamiento aditivo como el multiplicativo, que se desarrollarán a lo largo de la educación primaria, primero la estructura aditiva y posteriormente la multiplicativa.

6.1. Estructura aditiva

Las situaciones aditivas se pueden encontrar en contextos familiares en los que se realiza algún tipo de acción como añadir, juntar, separar o quitar. Sin

embargo, las acciones no tienen por qué corresponderse con una sola operación. Por ejemplo, en el caso de la acción de añadir, podemos plantear dos situaciones diferentes: *a*) si tengo dos caramelos en una bolsa y añado tres, ¿cuántos caramelos tengo?, y *b*) si tengo dos caramelos en una bolsa y necesito cinco, ¿cuántos caramelos tengo que añadir? Estas situaciones se pueden resolver en ambos casos mediante una suma (2 + 3 = ..., en el primer caso, y 2 + – = 5, en el segundo) o mediante la operación opuesta: 5 – 2 = ... en el segundo caso.

Suma

Una definición de suma se hace basándose en el conteo de la forma siguiente: sumar dos números a y b consiste en aumentar a tantas unidades como indica b de modo que se obtiene un resultado c.

Otra definición de suma es posible mediante la cardinalidad de los conjuntos y su unión. Así, siendo A y B dos conjuntos disjuntos; el número natural a, el cardinal del conjunto finito A, es decir, el número de elementos que tiene dicho conjunto, y b, el cardinal del conjunto B, la suma $a + b$ es el cardinal del conjunto C, el cual reúne todos los elementos de A y de B. La expresión simbólica de la suma es $a + b = c$. A los números a y b se les denomina sumandos, y c es la suma o resultado de la suma.

Resta

La diferencia o resta de dos números naturales a y b, con $a \geq b$, es aquel otro número c que sumado con el menor de ellos, b, da como resultado el mayor, a. Su expresión simbólica es $a - b = c$, expresión equivalente a $c + b = a$. Por este motivo se dice que la sustracción es la operación opuesta a la adición.

En una resta al mayor de los números se le denomina minuendo, y al menor, sustraendo; el resultado es la diferencia o resultado de la resta.

Concepciones o significados de la suma y la resta

De acuerdo con las acciones que se pueden modelizar con las operaciones de suma o resta, se diferencian dos concepciones o significados, tanto en la suma como en la resta: concepción unitaria y concepción binaria. La concepción unitaria de la suma agrupa aquellas acciones en las que se produce un cambio sobre una cantidad inicial (o conjunto) al añadirle una segunda cantidad, es decir, hay una acción física sobre la cantidad inicial. Análogamente, la concepción unitaria de la resta se refiere a situaciones en las que se produce un cambio en la cantidad inicial al quitarle una segunda cantidad.

En la concepción binaria de la suma se considera que hay dos cantidades (o colecciones) que tienen asignado el mismo papel y se realiza una combinación de ambas que permite llegar al resultado. En esta concepción, no se produce ninguna acción física. Análogamente, en la concepción binaria de la resta hay dos cantidades que tienen asignado el mismo papel y se tiene en cuenta lo que hay en el todo y una de las partes. En la tabla 7.1 mostramos ejemplos de estas situaciones (unitaria y binaria) para la suma y para la resta.

TABLA 7.1

Ejemplos de situaciones para la suma y la resta según las concepciones unitaria y binaria

Suma	**Resta**
Concepción unitaria	
Elena tiene tres lápices y compra otros dos. ¿Cuántos lápices tiene Elena?	María tiene tres galletas y se come una. ¿Cuántas galletas le quedan a María?
Concepción binaria	
Mar tiene tres euros en su mano derecha y dos en su mano izquierda. ¿Cuántos euros tiene Mar?	Antonio tiene cuatro canicas. Una la tiene en su mano derecha. ¿Cuántas canicas tiene en la otra mano?

Actividad 1: Describe cómo podrías utilizar las regletas de Cuisenaire para resolver las situaciones de concepción unitaria de la tabla 7.1.

Actividad 2: Describe cómo podrías utilizar las plaquetas y los bloques multibase para resolver las situaciones de concepción binaria de la tabla 7.1.

Propiedades de la suma

La suma de números naturales presenta una serie de propiedades entre las que destacan las siguientes:

- Clausura: si se suman dos números naturales cualesquiera, el resultado también es un número natural.
  Simbólicamente: $a + b = c$ (a, b y c son números naturales en todas las propiedades).
- Conmutativa: si se suman dos números naturales cualesquiera, el resultado es el mismo independientemente del orden de los sumandos. Por ejemplo 3 + 2 = 2 + 3.
  Simbólicamente: $a + b = b + a$.
- Asociativa: si se suman tres o más números naturales cualesquiera, ordenadamente, el resultado es el mismo independientemente del modo en que se agrupen los sumandos. Por ejemplo (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4).
  Simbólicamente: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- Elemento neutro: la suma de cualquier número entero y cero es igual al número original. Por ejemplo 6 + 0 = 6.
  Simbólicamente: $a + 0 = a$.

En la figura 7.13 mostramos cómo se podría poner de manifiesto que 3 + 4 = 4 + 3 (propiedad conmutativa) mediante el uso de las regletas de Cuisenaire.

Actividad 3: Utiliza las regletas de Cuisenaire para poner un ejemplo de la propiedad asociativa para la suma.

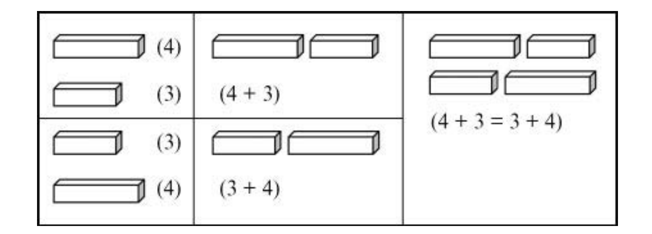


Figura 7.13.—Ejemplo de propiedad conmutativa para la suma con regletas Cuisenaire.

Propiedades de la resta

La resta no cumple las propiedades de clausura, conmutativa ni asociativa. El cero es el elemento neutro para la resta por la derecha, ya que la resta de cualquier número y cero es igual al número original. Además, destaca la propiedad de compensación, que involucra a la suma y la resta:

- Compensación: si se restan dos números naturales cualesquiera, el resultado es el mismo si al minuendo y al sustraendo le sumamos un mismo número natural. Por ejemplo 5 – 3 = (5 + 6) – (3 + 6).
  Simbólicamente: si $a - b = c$, entonces $(a + m) - (b + m) = c$.

Actividad 4: Toma tres números naturales, los que prefieras, y comprueba la propiedad de compensación de la resta.

6.2. Estructura multiplicativa

La multiplicación y la división son las dos operaciones aritméticas que se engloban dentro de la estructura multiplicativa.

Multiplicación

Una de las formas de definir el producto de dos números naturales es el siguiente. Si a y b son dos números naturales, el producto de a y b, escrito simbólicamente como $a \times b$, se define como la suma de

b a veces: $a \times b = b + b + \ldots$ (a veces) + b cuando $b \neq 0$, y como $a \times 0 = 0$. En el producto anterior a y b se dice que son los números que se multiplican o factores y c es el resultado o producto. También se llama a uno multiplicando (b) y al otro multiplicador (a).

Otra forma de definir el producto es el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos. Así, si a es el cardinal del conjunto A y b es el cardinal del conjunto B, el producto de a por b es igual a c, que es el cardinal del producto cartesiano de los conjuntos A y B. Se nota como $a \times b = c$.

El producto de dos números a y b se puede expresar de diferentes formas equivalentes:

$a \times b$ (nótese que es un aspa, no una x), $a*b$, $a.b$ o ab.

División

La división exacta es la operación inversa de la multiplicación. Si $a \times b = c$ equivale a que c dividido entre a es igual a b y también a que c dividido entre b es igual a a.

Simbólicamente la división se expresa $c : b = a$, donde c es el dividendo y b es el divisor.

Según la definición, las tres expresiones siguientes son equivalentes

$$a \times b = c \qquad c : b = a \qquad c : a = b$$

Concepciones o significados de la multiplicación y la división

Para la multiplicación se consideran dos concepciones: *a*) multiplicación como suma repetida y *b*) multiplicación como producto cartesiano.

- *Multiplicación como suma repetida*. Uno de los significados más elementales de la multiplicación es el de suma repetida o reiterada. Se justifica su introducción como un proceso que simplifica lo engorroso de realizar de forma repetida la suma de un número consigo mismo un alto número de veces. Así, la suma repetida $2 + 2 + 2$ se abrevia mediante el producto 3×2, y en este caso se lee «tres veces dos». En la figura 7.14 se muestra un ejemplo que pone de manifiesto este significado porque hay tres floreros con dos flores en cada uno.



Figura 7.14.—Multiplicación como suma repetida.

- *Multiplicación como producto cartesiano*. La multiplicación puede definirse como una nueva operación sin recurrir a la operación de suma. Una forma es recurriendo al producto cartesiano de conjuntos. Por ejemplo, si tenemos una cantidad C de camisetas y otra cantidad P de pantalones, podemos combinar cada camiseta con cada uno de los pantalones, dando lugar a un número de posibilidades de formas de vestirnos que corresponde al producto de ambas cantidades. En el caso de tener cuatro tipos de camisetas (una roja, una azul, una verde y otra amarilla) y tres pantalones (unos lisos, otros de cuadros y otros de rayas), obtenemos doce formas distintas de vestirnos, como se muestra en la figura 7.15.

La división exacta de números naturales, además de como operación inversa del producto, puede ser considerada como una operación en sí misma con características propias, que se aplica a la resolución de determinadas situaciones entre las cuales están las relativas a repartos equitativos (justos). La división puede ser entendida de dos modos: *a*) como *división partitiva* y *b*) como *división cuotitiva o medida*.

Pantalones	Camisetas			
	Roja	Azul	Verde	Amarilla
Liso	Pantalón liso y camiseta roja	Pantalón liso y camiseta azul	Pantalón liso y camiseta verde	Pantalón liso y camiseta amarilla
A cuadros	Pantalón a cuadros y camiseta roja	Pantalón a cuadros y camiseta azul	Pantalón a cuadros y camiseta verde	Pantalón a cuadros y camiseta amarilla
A rayas	Pantalón a rayas y camiseta roja	Pantalón a rayas y camiseta azul	Pantalón a rayas y camiseta verde	Pantalón a rayas y camiseta amarilla

Figura 7.15.—Ejemplo de producto cartesiano.

- *División partitiva*. La división partitiva tiene por objeto hallar una cantidad llamada *cociente* a partir de otra cantidad del mismo tipo llamada *dividendo* que se reparte entre una cantidad de distinto tipo que hace el papel de *divisor*. Por ejemplo, el maestro quiere repartir de forma equitativa una bolsa de 60 pegatinas (dividendo) entre los veinte niños (divisor) de su clase. ¿Cuántas pegatinas le corresponden a cada niño (cociente)?
- *División cuotitiva o de medida*. La división cuotitiva se puede entender como sustraer de forma repetida el cociente del dividendo, siendo el divisor el número de veces que podemos realizar esta resta. Por ejemplo, el maestro tiene una bolsa de 60 pegatinas y le quiere dar seis a cada niño. ¿Para cuántos niños tendrá pegatinas? En el ejemplo anterior a 60 le podemos restar el seis diez veces. En la división cuotitiva el dividendo tenemos que descomponerlo en partes de igual tamaño y, en principio, conocemos el tamaño de esas partes pero no su número.

Propiedades de la multiplicación

En el caso de las propiedades de la multiplicación de números naturales, destacamos las siguientes.

- Clausura: si se multiplican dos números naturales cualesquiera, el resultado también es un número natural.
- Conmutativa: si se multiplican dos números naturales cualesquiera, el resultado es el mismo independientemente del orden de los números. Por ejemplo $3 \times 2 = 2 \times 3$.
- Asociativa: si se multiplican, en el mismo orden, tres o más números naturales cualesquiera, el resultado es el mismo independientemente del modo en que se agrupen esos números. Por ejemplo $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$.
- Elemento unidad: para cualquier número natural *a,* 1 es el único número natural que cumple que al multiplicarlo por *a* el resultado es *a.*
- Multiplicación por cero: para cualquier número natural *a,* se cumple que, al multiplicarlo por 0, el resultado es 0.

ACTIVIDAD 5: Escribe las propiedades del producto en forma simbólica.

ACTIVIDAD 6: Ejemplifica la propiedad conmutativa del producto con bloques multibase.

Propiedades de la división

La división no cumple la propiedad conmutativa ni la asociativa. No obstante, al combinar la división con otras operaciones, cumple una serie de propiedades que presentamos a continuación.

- El número 1 actúa como elemento neutro por la derecha en la división porque cualquier nú-

mero natural dividido entre 1 es igual a ese número natural.
- Para dos números naturales cualesquiera, se cumple que un número dividido por el otro y multiplicado por ese otro número es igual al número inicial.

En relación con la división y otras operaciones, si *a, b* y *c* son tres números naturales cualesquiera, se cumplen las siguientes propiedades:

- $(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$.
- $(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$.
- $a \times (b : c) = (a \times b) : c$.
- $a : (b \times c) = (a : b) : c$.
- $a : (b : c) = (a : b) \times c$.

ACTIVIDAD 7: Comprueba, dando valores numéricos a las letras, las propiedades anteriores.

6.3. Cálculo

El cálculo es el conjunto de procedimientos que permiten obtener el resultado de una operación. Se considera una de las partes más importantes de la matemática por su utilidad para la vida cotidiana. El cálculo se relaciona con todos los temas matemáticos y además permite desarrollar la memoria, la capacidad de deducción, el análisis y la síntesis.

El cálculo puede hacerse escrito o «pensado» (de cabeza). Para realizar cálculo escrito se siguen normalmente unos algoritmos o se utilizan máquinas. Para el cálculo pensado se siguen unas estrategias que permiten llegar al resultado de la operación de forma sencilla.

En aquellas ocasiones en las que sólo se precisa un resultado aproximado de la operación, se hace una estimación de ésta.

ACTIVIDAD 8: Cronometra el tiempo que tardas en realizar mentalmente las siguientes operaciones y al finalizar compara con varios compañeros el tiempo tardado:

15 + 31 =   20 × 5 =   76 : 5 =   35 × 4 =   100 : 5

ACTIVIDAD 9: Realiza mentalmente y da una aproximación de las siguientes operaciones:

30 × 101 = 99 : 4 = 555 : 6 = 111 – 99 = 423 : 2 =

7. PROBLEMAS ARITMÉTICOS DE UNA ETAPA

Las operaciones aritméticas permiten dar respuesta a problemas del mundo real. En el ámbito educativo, estos problemas se presentan al escolar en forma de texto escrito, y se denominan problemas aritméticos de enunciado verbal. Problemas aritméticos de una etapa son aquellos que se pueden resolver mediante una sola operación aritmética. Por ejemplo, el texto *Irene tiene 5 caramelos y Pepi tiene 3; ¿cuántos caramelos tiene Irene más que Pepi?* corresponde a un problema aritmético de enunciado verbal de una etapa.

Si la operación que permite llegar a la solución correcta es una suma (adición) o una resta (sustracción), se dice que el problema es de estructura aditiva. Si la operación es multiplicación o división, se dice que el problema es de estructura multiplicativa. Los problemas de estructura aditiva o multiplicativa varían según el orden y posición de la incógnita. En la tabla 7.2 mostramos los tipos de sentencias abiertas que pueden representar los problemas aditivos.

TABLA 7.2

Tipos de sentencias abiertas para la estructura aditiva

Suma	Resta
a + b = ?	a – b = ?
a + ? = c	a – ? = c
? + b = c	? – b = c
? = a + b	? = a – b
c = ? + b	c = ? – b
c = a + ?	c = a – ?

Según el significado de las situaciones que se pueden plantear, se suelen considerar los siguientes tipos de problemas aditivos. Describimos cada uno de los tipos de problemas considerando un ejemplo. En cada caso, existen otros dos posibles ejemplos en función de dónde se ubique la cantidad desconocida.

Problemas de cambio. En estos problemas hay una cantidad inicial que se somete a una transformación para llegar a una cantidad final.

Aumento: tengo tres cromos y mi madre me compra cinco; ¿cuántos cromos tengo en total?

Disminución: en un coche hay tres personas; si se bajan dos, ¿cuántas personas quedan en el coche?

Actividad 1: Utilizando el mismo contexto del ejemplo, propón dos problemas de aumento cambiando el lugar de la cantidad desconocida.

Actividad 2: Utilizando el mismo contexto del ejemplo, propón dos problemas de disminución cambiando el lugar de la cantidad desconocida.

Problemas de combinación. En los problemas de combinación hay dos cantidades estáticas que constituyen un todo.

Unión: en el frutero hay dos peras y tres naranjas; ¿cuántas piezas de fruta hay en total en el frutero?

Separación: Ana tiene una bolsa con seis caramelos. Si dos son de fresa y el resto de menta, ¿cuántos caramelos de menta hay en la bolsa?

Actividad 3: Propón dos problemas de unión cambiando el lugar de la cantidad desconocida.

Problemas de comparación. En estos problemas hay dos cantidades independientes que se relacionan mediante la comparación.

Aumento: Juan tiene ocho galletas y María tiene cinco; ¿cuántas galletas tiene Juan más que María?

Disminución: María tiene nueve años. Si Juan tiene dos años menos que María, ¿cuántos años tiene Juan?

Actividad 4: Plantea un problema de comparación en el que el lugar de la incógnita sea diferente a los propuestos en el ejemplo anterior.

8. EJERCITA TU APRENDIZAJE

Actividad 1: Busca dos cuentos en los que aparezcan números y analiza el tipo de representación en que se expresan dichos números.

Actividad 2: Indica situaciones reales en las que los números se usen como etiqueta y como medida.

Actividad 3: Indica qué principios del conteo no se cumplen en la conversación entre Paula y Jaime, que están contando las piezas de construcción que tienen.

—Jaime: Cero, uno, dosss.
—Paula: Noooooo. No lo haces bien.
—Jaime: Voy a intentarlo de nuevo.
Mientras va señalando una a una las piezas, recita:
—Jaime: Uno, dos, dos, tres, tres, tres, cuatro...
—Paula: ¡Pero Jaime!, ¡así no! ¡No repitas!
—Jaime: Bueno, pero no te enfades. Voy a intentarlo de nuevo.
—Jaime: Uno, dos, tres y cua-tro (pronuncia cuatro separando las sílabas y señala un bloque con cada una de ellas).
—Paula: ¿Cómo van a ser cuatro si has puesto cinco bloques? No lo entiendo... ¿Puedes repetirlo?

Actividad 4: Describe los principios del sistema de numeración decimal que cumple el ábaco vertical.

Actividad 5: Representa los números que se leen como «mil cien» y «setecientos cincuenta y cuatro».

Actividad 6: Para los números romanos que aparecen a continuación, escribe su equivalente en el sistema de numeración decimal: MMCCII, CCLLIV, MDLVI.

Actividad 7: Utiliza las plaquetas de Herbinière-Lebert para proponer un ejemplo en el que se vea que la resta no cumple la propiedad conmutativa.

Actividad 8: Razona si los siguientes problemas de estructura aditiva son de una etapa o no.

- Ayer me compré cinco cromos, hoy mi amiga me regaló dos y en el recreo perdí uno. ¿Cuántos cromos tengo ahora?
- Enrique ha gastado 4 euros; si tiene 7 euros en su bolsillo, ¿cuántos euros tenía antes?

Actividad 9: Especifica de qué tipo (cambio, combinación o comparación) es cada uno de los siguientes problemas de estructura aditiva:

- Hay cuatro chicos y cinco chicas alrededor de una mesa. ¿Cuántos niños hay en total?
- Marina gana 100.000 dólares más que Pedro. Pedro gana 400.000 dólares al año. ¿Cuánto gana Marina?
- En un autobús hay ocho personas; si se bajan tres en una parada, ¿cuántas personas quedan en el autobús?
- En una mano tengo cinco caramelos de fresa y en la otra dos de menta. ¿Cuántos caramelos tengo en total?

8 Pensamiento numérico

MARÍA C. CAÑADAS
MARTA MOLINA

Alicia (4 años): *Quedan cinco aceitunas.*
Mamá: *No es verdad. Cuéntalas y verás.*
Alicia: *Uno, dos, tres y... cinco.*
Mamá: *¿Cómo que cinco? ¿Y el cuatro por qué no lo dices?*
Alicia: *Es que si digo el cuatro... ya no son cinco.*



Figura 8.1.—Observación de un numeral.

Los números y las operaciones son uno de los bloques prioritarios para trabajar con los niños de educación infantil. Afortunadamente, es de los temas que más se han abordado desde el punto de vista de la investigación en este nivel educativo. Aunque se considera un área emergente dentro de la Didáctica de la Matemática, hay estudios desde el punto de vista psicológico y de la educación en general que nos permiten comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con este tipo de pensamiento.

Los números y las operaciones son contenidos que tienen entidad por sí mismos desde el punto de vista matemático pero que están abocados a trabajarse conjuntamente. La principal finalidad del trabajo con números y operaciones en educación infantil es ayudar a los niños a que apliquen razonamientos cuantitativos adecuados en situaciones reales conforme a sus capacidades. En suma, que desarrollen su pensamiento numérico.

El sentido numérico, identificado con frecuencia con el pensamiento numérico, en contexto, incluye procedimientos como la composición y descomposición de números, reconocer los números como magnitudes relativas, trabajar con los números como magnitudes absolutas, relacionar y utilizar diferentes representaciones, entender el sentido de las operaciones aritméticas básicas, inventar estrategias, estimar y tener una disposición para darle sentido a los números.

Esperamos que el estudio de este capítulo proporcione conocimiento sobre las capacidades numéricas que pueden llegar a adquirir los niños en educación infantil, así como competencia para aplicar dicho conocimiento a situaciones de enseñanza en este nivel educativo.

1. CONOCIMIENTOS NUMÉRICOS

Los niños tienen un sentido del número y la aritmética muy desarrollado desde pequeños. Hay investigaciones que revelan que desde bebés poseen sentido de la cantidad, pues muestran mayor interés cuando ven una mayor cantidad de algo que les atrae que si ven menor cantidad. Se recomienda utilizar estas facultades intuitivas para facilitar el desarrollo de las capacidades aritméticas.

Entre las capacidades numéricas que los niños deben adquirir durante la educación infantil, en los currículos se consideran las siguientes:

- Hacer comparaciones cuantitativas entre dos colecciones de objetos.
- Aproximarse a la cuantificación no numérica (por ejemplo, muchos, pocos, algunos) y numérica a través de acciones como juntar, distribuir, hacer correspondencias y contar elementos.
- Comprender los efectos de añadir o quitar elementos en una colección de objetos.
- Comprender el funcionamiento del sistema decimal de numeración.
- Usar los primeros números ordinales de forma contextualizada.
- Estimar el número de objetos en una colección.
- Usar números cardinales referidos a cantidades manejables.
- Utilizar la serie numérica para contar.

Se recomienda utilizar las capacidades innatas de los niños para facilitar el desarrollo de contenidos numéricos. A continuación abordamos algunos de estos contenidos.

ACTIVIDAD 1: Analiza el currículo de Educación Infantil vigente en tu comunidad y realiza un informe sobre las capacidades numéricas que en él se indica que han de desarrollar los escolares.

1.1. Subitización

Los niños tienen un sentido natural para la subitización, y dicha capacidad se inicia muy temprano. Antes de los 3 años, son capaces de distinguir si hay un elemento en una colección o si hay más. Alrededor de los 4 años, perciben hasta cuatro elementos. A partir de esa edad, la subitización y el conteo se conectan.

Es importante que el niño sea capaz de subitizar perceptivamente para lograr, posteriormente, la subitización conceptual (véase capítulo 7). Algunos investigadores consideran que ambos tipos de subitización son precursores del conteo.

La subitización es una capacidad importante a desarrollar, no sólo por el ahorro de tiempo que supone sino principalmente porque ayuda al reconocimiento de relaciones numéricas (tres es más que dos; uno es menos que cuatro) y al desarrollo de

estrategias de conteo más sofisticadas, acelerando el aprendizaje de la suma y la resta.

Se facilita la subitización cuando los objetos presentan una disposición organizada, si bien todas las disposiciones no resultan igualmente facilitadoras. Así, de entre las diferentes disposiciones de puntos que mostramos en la figura 8.2, la más sencilla de reconocer es la rectangular, seguida de la lineal y circular, siendo la última la más difícil de percibir.

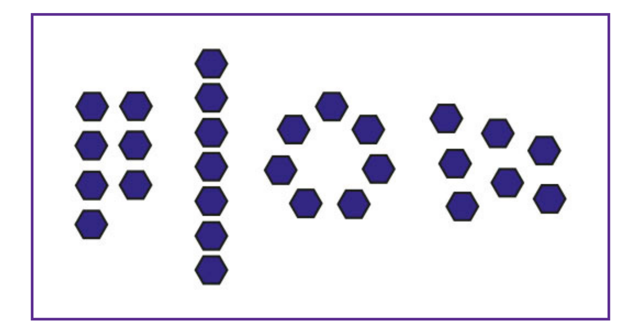


Figura 8.2.—Representaciones puntuales de siete elementos.

Actividad 2: Imagina que envías una nota a los padres pidiendo que ayuden a sus hijos a mejorar sus habilidades de subitización de cantidades inferiores a cinco. Un padre te responde preguntándote sobre su utilidad dado que siempre está disponible el conteo. ¿Cómo le responderías?

1.2. Secuencia numérica convencional y orden

Los adultos estamos tan familiarizados con el proceso de contar que nos resulta complicado entender la complejidad que entraña realizar esta acción para los niños de educación infantil. Es necesario cumplir con los principios del conteo (véase capítulo 7) para realizar el proceso de forma correcta. Los adultos ya sabemos contar y aplicamos esos principios automáticamente, sin ser conscientes de ello.

El primero de los principios tiene que ver con la secuencia numérica convencional[1]. El aprendizaje de esta secuencia conlleva la superación de los niveles que presentamos a continuación.

- *Nivel cuerda.* La sucesión de términos comienza en uno y los términos no están diferenciados, los recita como en una retahíla. El niño repite una secuencia cada vez que se le pide que diga los números que sabe. Todas las palabras de la secuencia están conectadas de forma continua. Por ejemplo: unodosdiez.
- *Nivel cadena irrompible.* La sucesión empieza en uno y los términos que conoce están diferenciados. No es capaz de repetir la secuencia si se le pide que la diga comenzando en un término diferente de uno. Por ejemplo: uno, dos, tres, cuatro y cinco.
- *Nivel cadena rompible.* La sucesión de términos que conoce la puede comenzar en cualquier término (permitiendo ciertas estrategias de conteo). Por ejemplo: dos, tres, cuatro y cinco; o tres, cuatro y cinco.
- *Nivel cadena numerable.* Puede decir un número de términos desde uno dado hasta otro dado y las palabras son unidades que en sí mismas pueden ser contadas.
- *Nivel cadena bidimensional.* Dado un término de la sucesión, el niño recita la sucesión desde ese término hacia delante y hacia atrás.

El aprendizaje de la secuencia numérica implica el aprendizaje de los términos primarios y las normas que permiten nombrar los números mayores que quince y entender que hay unos términos que se combinan y unas normas de combinación de esos términos para construir los nombres de otros números.

Hay que considerar que los niños con deficiencias auditivas o con dificultades relacionadas con el lenguaje requerirán más tiempo y esfuerzo para el aprendizaje de la secuencia numérica.

[1] En adelante, utilizamos la expresión «secuencia numérica» para hacer referencia a la «secuencia numérica convencional».

El conocimiento de la secuencia numérica, no sólo hacia adelante sino también hacia atrás (lo que implica un proceso de aprendizaje largo basado en el dominio de la secuencia hacia adelante), conduce a aprender a identificar el número anterior y posterior a uno dado y es de gran utilidad para desarrollar estrategias de cálculo. Las relaciones «uno más» y «uno menos» son una de las relaciones numéricas a trabajar junto con la secuencia numérica. Ambas pueden ser modelizadas de diversas formas para promover su aprendizaje. Para los números del 1 al 5 se puede trabajar con las regletas Cuisenaire, patrones de puntos o cubos que se encajan (véase figura 8.3). Las regletas son un modelo muy diferente a los otros dos pues se hace necesario identificar la regleta unidad para poder reconocer las diferencias entre regletas. Se ilustra la relación de más y menos, pero no es tan claro cuánto más o cuánto menos.

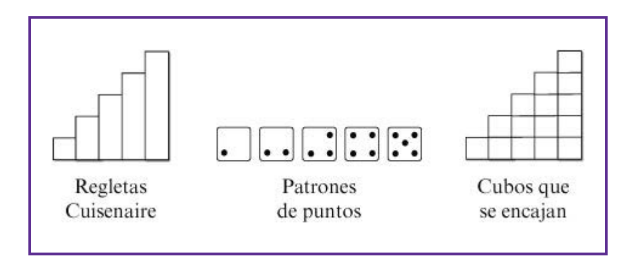


Figura 8.3.—Representaciones de los cinco primeros números naturales para trabajar las relaciones uno más y uno menos.

ACTIVIDAD 3: Busca juegos infantiles que sean de utilidad para el aprendizaje de la secuencia numérica.

Los niños deben llegar a conocer que cada número de la secuencia numérica representa una cantidad de objetos; como consecuencia, que un número sucesivo a otro en la secuencia numérica representa una colección que contiene un objeto más. Los niños que usan y comprenden estos principios pueden razonar que si al contar dos colecciones, en una hay nueve y en la otra siete, la colección con nueve tiene más porque nueve es posterior a siete en la secuencia. Estas habilidades son esenciales para establecer relaciones de orden entre los números.

La composición y descomposición numérica se introducen en educación infantil y, de forma intuitiva, se presentan algunas de las combinaciones que dan lugar a nuevos términos. Hay que tener en cuenta que la mayoría de estas normas para combinar los términos son objetivo del primer curso de educación primaria.

El aprendizaje de las relaciones de orden implica conocer las palabras ordinales primero, segundo, tercero, etc., y reconocer otras expresiones equivalentes a éstas como lugar 1, lugar 2, lugar 3, etc., o, simplemente, «el objeto» uno, «el objeto» dos... Los niños suelen aprender, en primer lugar, los términos primero, segundo y último. En ocasiones, se enseña la secuencia numérica ordinal estableciendo un paralelismo con la secuencia numérica convencional.

Algunos de los términos de la secuencia ordinal a veces se dicen incorrectamente. Por ejemplo, la expresión «llegó en la posición doceava» no es correcta y muestra desconocimiento de los términos ordinales, ya que la terminación «-ava» no se usa para los ordinales, sino para las fracciones. Lo correcto es decir «posición decimosegunda», «posición duodécima» o «posición doce».

Ambos usos del número, cardinal y ordinal, deben recibir atención en la enseñanza, si bien no existe recomendación del orden en el que debe hacerse.

1.3. Proceso de contar

El dominio de la secuencia numérica es clave para utilizar el número en los diferentes contextos. En particular, la secuencia numérica es esencial para contar. Los seguidores de Piaget creían que el niño necesitaba desarrollar la lógica subyacente a la idea de conservación de la cantidad antes de que contar fuera significativo. Esta lógica consiste en la clasificación jerárquica y la secuenciación. La clasificación jerárquica considera que cada número está incluido en el siguiente. La secuenciación se refiere al orden de los términos en la secuencia nu-

mérica y a que siempre que avanzamos un término en esa secuencia numérica es porque hay un elemento más en la colección. Aunque ciertamente los niños deben ser conscientes de esta lógica, la realidad es que actualmente se conoce que los niños aprenden muchas cosas de los números y del conteo antes de ser conscientes de la lógica que Piaget consideraba previa.

Incluso niños de 3 años son capaces de diferenciar entre predecir la cantidad de objetos de una colección y contarlos. Estos niños además prefieren los resultados que obtienen a través del conteo frente a los obtenidos por medio de predicciones.

Los niños suelen contar pequeñas colecciones de objetos hacia los 3 años. La acción de contar requiere la coordinación visual, manual y verbal. En primer lugar, se requiere emparejar términos y objetos mediante la acción de señalar. Inicialmente el niño necesita tocar los objetos para señalarlos, posteriormente le basta con señalarlos sin tocarlos con un dedo y, finalmente, recurre sólo a la mirada.

Los niños menores de 3 años empiezan contando colecciones con pocos objetos organizados en línea recta, que puedan ser tocados. Posteriormente, cuentan una colección mayor separando los objetos conforme los va contando, pasándolos de la colección inicial a una nueva hecha con los objetos ya contados. Después pueden contar colecciones de números mayores y en diferentes disposiciones sin necesidad de tocar o mover los objetos mientras lo hacen.

A veces los niños incurren en errores al contar pero muestran haber adquirido los principios que rigen el conteo (véase capítulo 7). Estos errores pueden deberse a una interpretación inadecuada de los principios o a un conocimiento incorrecto de la secuencia numérica (por ejemplo, no conocer el orden estándar de las palabras numéricas).

El *principio de orden estable* requiere usar las palabras de la secuencia numérica en su orden establecido. Es habitual que los niños digan las palabras numéricas en otro orden. Por ejemplo, los niños pueden recitar las palabras «uno, dos, tres, cinco, seis y cuatro». Este error se repite con más frecuencia conforme los números aumentan.

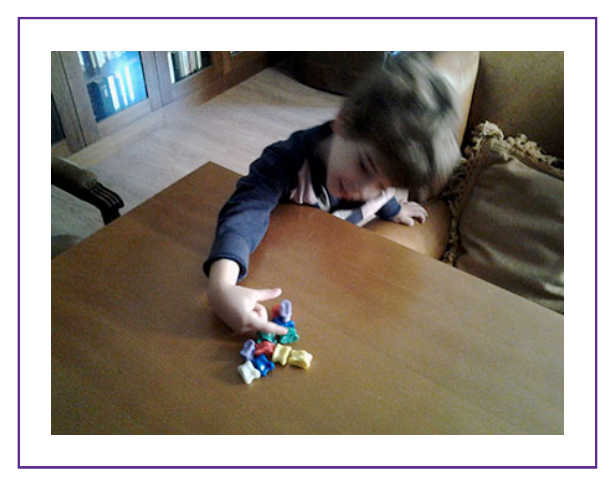


Figura 8.4.—Contando objetos.

El *principio de correspondencia uno a uno* requiere la coordinación de dos procesos: el de partición y el de etiquetación. El proceso de partición se refiere a la distinción entre los elementos de una colección que se han contado y los que faltan por contar. El proceso de etiquetación supone la asignación de una palabra numérica como etiqueta que se habrá de hacer corresponder una y sólo una vez a cada objeto. En consecuencia, los niños pueden incurrir en algunos errores al contar como:

- Señalar un objeto pero no asignarle ninguna etiqueta.
- Asignar múltiples etiquetas a un mismo objeto, ya sea señalándolo una única vez o varias.
- Asignar una misma etiqueta a más de un objeto.
- Etiquetar en un lugar donde no hay ningún objeto.

La adquisición del *principio de cardinalidad* por el niño puede comprobarse preguntando ¿cuántos hay? después de haber contado los objetos de una colección. A partir de los 3 años los niños dan muestras del uso de este principio repitiendo el último número del conteo, poniendo un énfasis especial en el último elemento de la secuencia de

conteo o indicando la última palabra empleada en el conteo.

Se han identificado seis niveles evolutivos por los que pasan los niños en la adquisición de este principio:

- No entienden la situación planteada y dan respuestas al azar.
- Repiten la secuencia de números emitidos sin referencia explícita a los objetos.
- Repiten la secuencia de números estableciendo correspondencias entre los numerales y los objetos.
- Responden siempre con el último número emitido sin tener en cuenta si se corresponde o no con la cantidad de objetos.
- Responden con el numeral mayor de la secuencia de conteo.
- Comprenden que el último número corresponde y representa la totalidad del conjunto.

ACTIVIDAD 4: Supón que un niño de 4 años ha respondido que tiene seis canicas cuando en realidad tiene cinco. Analiza qué le ha podido pasar cuando las ha contado.

El aprendizaje del *principio de abstracción* (o generalidad) también implica pasar por varias etapas:

- Contar sólo los objetos que están dentro de su campo visual.
- Contar objetos que no están disponibles directamente a través de representaciones de ellos.
- El numeral adquiere la cualidad de ser contado.
- Prescindir de ayudas externas y contar cualquier objeto.

El *principio de irrelevancia del orden* es el que más tiempo tardan en adquirir los niños, quienes tienden a considerar importante el orden en que se toman los objetos para ejecutar el conteo. Se ha constatado que los niños muestran preferencia por el conteo de izquierda a derecha y de arriba abajo hasta los primeros cursos de educación primaria, e incluso rechazan, por considerarlos erróneos, procesos de conteo que se ejecuten en otro orden. A diferencia del resto de principios, éste no es necesario para ser exitoso en la ejecución de un conteo. La adquisición de este principio supone que el niño conoce que el objeto contado es una cosa y no una etiqueta, que las etiquetas de conteo son asignadas al objeto de forma temporal y arbitraria y que siempre se obtiene el mismo resultado al contar el mismo conjunto o colección.

ACTIVIDAD 5: Proponer ejemplos de situaciones en las que un niño está contando e incurre en algún error debido a que:

a) No está utilizando adecuadamente el principio de orden estable, pero sí el resto de principios.
b) No está utilizando adecuadamente el principio de cardinalidad, pero sí el resto de principios.
c) No está utilizando adecuadamente el principio de correspondencia uno a uno ni el de orden estable, pero sí el resto de principios.

A partir de los principios del conteo, surge la pregunta: ¿hasta cuántos elementos pueden contar los niños de educación infantil? Hay muchos factores que influyen en la respuesta que se pueda dar. Por ejemplo, suponiendo que trabajamos con objetos concretos, es más fácil para los niños si los objetos no se dividen ni se separan porque, para ellos, es difícil entender que dos mitades se unen para formar la unidad.

El conteo constituye una habilidad útil para los niños cuando solucionan diferentes problemas matemáticos antes de los aprendizajes formales.

1.4. Noción de cantidad

La cardinalidad no es una cualidad innata en los niños. De hecho, que los niños cuenten correc-

tamente no implica que hayan entendiendo la noción de cardinalidad. Que el niño sea capaz de responder a la pregunta ¿cuántos hay? a partir de un conteo puede ser un comportamiento aprendido pero que no evidencie una comprensión de la cardinalidad del conjunto. Este hecho se observa cuando los niños dan como respuesta la última palabra numérica empleada aunque sea incorrecta, como ocurre cuando se les pide que empiecen a contar desde un número diferente al uno.

Un momento importante en el aprendizaje del concepto de número es aquel en el que el niño descubre la cardinalidad. Por ejemplo, cuando ha respondido que hay seis naranjas en la mesa después de haberlas contado, si le preguntamos cuáles son las seis naranjas y el niño señala la última (no todas), pone de manifiesto que no ha adquirido esta noción. Igualmente, si les preguntamos por el número de naranjas que hay, puede que tenga que volver a contarlas.

Para llegar a adquirir la idea de cardinalidad se recomienda trabajar con actividades de conteo de objetos variados desde los 2 años para que sobre los 3 años y medio hayan adquirido esta noción en el conteo de colecciones pequeñas. A los 5 años deberían haber superado la noción de cardinalidad en la mayoría de situaciones cotidianas.

A partir de los trabajos de Piaget, algunos autores distinguen diferentes fases en la adquisición de la noción de cantidad que se corresponden con diferentes respuestas que dan al pedirles que reproduzcan una fila de fichas con la misma cantidad que otra dada.

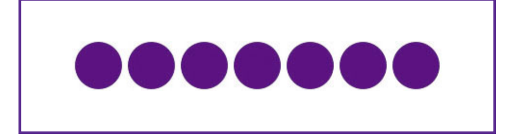


Figura 8.5.—Fila de fichas dada.

- *Fase 1.* Reproduce la fila considerando la longitud de la fila inicial, sin separar las fichas de la fila que construye y sin tener en cuenta la cantidad de fichas.
- *Fase 2.* Hace una correspondencia visual exacta, pero piensa que si se distancian los elementos de la fila, entonces hay un mayor número de elementos.
- *Fase 3.* Capta la conservación del número de partes pero no de la cantidad. Así, construye una fila con el mismo número de fichas pero más larga, y piensa que la más larga tiene más fichas.
- *Fase 4.* Capta la conservación del número de partes y de la cantidad. Construye una fila igual de larga que la inicial y con el mismo número de fichas.

Los estudios de Piaget indican que la cuarta fase debería estar superada hacia los 6-7 años de edad.

1.5. El cero

Los niños de educación infantil tienen una noción limitada de lo que significa el cero. Este término no aparece en el acto de contar y es menos familiar a los niños. Los sentidos son muy importantes en estas edades y los niños no pueden tocar un objeto a la vez que le asignan el cero como cantidad. Sin embargo, reconocen que cuando no hay objetos, se les asigna el cero como cantidad. Aunque para los adultos no suele haber diferencias, los niños resuelven situaciones que involucran al cero de forma diferente a otras en que no aparece. Algunos autores distinguen tres niveles por los que pasa el niño en el aprendizaje del cero.

- *Nivel 1.* Se familiarizan con el término «cero» y su numeral «0».
- *Nivel 2.* Aprenden que el cero es una cantidad numérica única que significa «ninguno» o «nada».
- *Nivel 3.* Relacionan el cero con los números pequeños que usan para contar.

Debido a las dificultades que entraña la comprensión del cero, los niños tienden a desarrollar sus propias reglas para usarlo. Su comprensión y las reglas que manifiestan constituyen un primer paso hacia reglas algebraicas más generales. Por ejemplo,

algunos niños de educación infantil terminan esta etapa reconociendo que $a + 0 = a$.

Actividad 6: Busca un libro de fichas de infantil en las que se trabajen los primeros números naturales. Analiza la secuencia que llevan en la presentación de los números y el lugar que ocupa el cero en dicha secuencia.

1.6. Valor posicional

El sistema decimal de numeración es posicional (véase capítulo 7). Es importante que el valor posicional de los números se introduzca desde los primeros cursos. A partir de la formación de grupos de diez objetos, los escolares pueden ver que diez objetos de una unidad equivalen a un grupo de diez. Así se trabaja la doble visión de la decena: como un grupo y como diez unidades. Desde el 11 hasta el 19, tienen un grupo de diez y otras unidades sueltas (dos, en el caso del 12, por ejemplo). Paralelamente, el niño desarrolla la idea de que, si tengo quince objetos, esta cantidad de objetos supera en cinco objetos al 10. De esta forma, se está trabajando la composición y descomposición numérica (15 = 10 + 5), así como el proceso de contar. Juegos en los que una cantidad de objetos (pueden ser cinco) se cambian por otro objeto algo mayor y viceversa ayudan a crear idea de agrupamiento mediante una cantidad constante (por ejemplo, cinco hojas de árbol pequeñas por una más grande, cinco pegatinas pequeñas por una más grande o más vistosa).

La no adquisición temprana del valor posicional de los números por los niños no supone un retraso en el aprendizaje, sino que lleva a algunos niños a pensar que el número 89 es más grande que el 90, ya que el primero tiene los dígitos 8 y 9 y el segundo tiene el 9 y 0, y «el cero no vale nada».

Actividad 7: Diseño una tarea utilizando objetos concretos en la que niños de 5 años puedan descubrir que desde el 11 hasta el 19 hay un grupo de diez y otras unidades sueltas (dos, en el caso del 12, por ejemplo).

Se distinguen diferentes niveles en la adquisición del valor posicional de los números.

- *Nivel 1.* Hacer un grupo con todas las unidades, sin separar diez en un único grupo.
- *Nivel 2.* Separar las unidades del grupo de las decenas. Con 23 objetos, hacer un grupo de 20 y otro de 3.
- *Nivel 3.* Organizar los objetos en grupos de diez y luego contar las unidades y los grupos de decenas. Con 23 objetos, hacen dos grupos de diez (10, 20) y luego cuentan hasta 23 (21, 22 y 23).
- *Nivel 4.* Contar las decenas y después las unidades como en el nivel previo.
- *Nivel 5.* Conectar los términos de la secuencia numérica (veintitrés) con los numerales (23) y con la cantidad de objetos (23 objetos).

Es posible que un mismo niño dé evidencias de estar en diferente nivel dependiendo del tamaño del número. Usualmente, para números grandes están en niveles previos que para otros números más pequeños.

Una buena comprensión del valor posicional permite a un niño responder de forma espontánea a preguntas tales como «aquí hay un paquete de diez pegatinas y aquí otras ocho, ¿cuántas pegatinas hay en total?» y reconocer que hay 18, entendiendo que el 1 del paquete representa diez en el numeral 18. En caso contrario, el niño necesitará recurrir al conteo para obtener la respuesta.

En general, el conocimiento sobre el valor posicional se desarrolla en asociación con estrategias de cálculo mental para la suma y la resta.

El uso de cuadrículas de diez, a modo de regleta Herbinière-Lebert vacía (véase figura 8.6), facilita la conexión del conteo y la agrupación de diez en diez. Asimismo, las actividades que requieran la comparación de colecciones de objetos no factible por estimación son buenas para apreciar la utilidad del agrupamiento de diez en diez. En especial, si su tamaño provoca que el conteo suponga alta demanda cognitiva para la memoria a corto plazo.

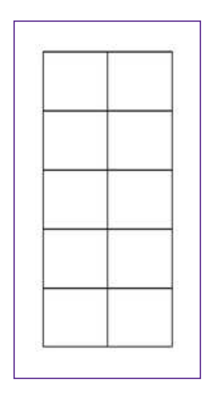


Figura 8.6.—Cuadrícula de diez.

2. CÁLCULO ARITMÉTICO

Numerosos estudios han abordado cómo los niños aprenden cálculo numérico y han ofrecido numerosas evidencias de su capacidad aritmética en educación infantil. El cálculo emerge inicialmente con números muy pequeños. El cálculo exacto está precedido por un período de aproximaciones que es más preciso que las adivinanzas o el azar. Desde los 3 años, los niños son capaces de resolver problemas aritméticos aditivos verbalmente, resultando la sustracción más difícil que la adición cuando se trabaja con números mayores de cinco. Los problemas con números grandes se resuelven con el soporte de objetos alrededor de los 5 años. A esa edad ya han aprendido la secuencia numérica y el principio de cardinalidad y han desarrollado la habilidad de convertir palabras numéricas verbales en cantidades significativas.

Se distinguen dos concepciones genéricas sobre el aprendizaje del cálculo aritmético: aprendizaje por asociación y aprendizaje por reestructuración. Para la teoría del aprendizaje por asociación, el cálculo se introduce en la mente desde el exterior y es necesario que el niño memorice ciertos datos y procedimientos; la reflexión es poco necesaria. Por otro lado, la teoría de la reestructuración sostiene que el cálculo se aprende a través de procesos comprensivos y la conexión con la experiencia de los niños. Desde esta perspectiva, la comprensión de los niños es fundamental para llegar a reconstruir sus propios procedimientos si fuese necesario.

Desde la teoría del aprendizaje por reestructuración, se han hecho aportes complementarios procedentes de la psicología de la Gestalt, el constructivismo y la teoría del procesamiento de la información. Entre estos aportes, destacamos la importancia de la elaboración de representaciones mentales gráficas o visuales, la participación activa en la adquisición del conocimiento aritmético y la importancia de la memoria para retener cierta información.

Algunas investigaciones señalan que la adición está relacionada, inicialmente, con la acción de añadir o concepción unitaria, siendo posterior su vinculación a la acción de combinar o concepción binaria (véase capítulo 7). A los 3 y 4 años, los niños empiezan a comprender la concepción unitaria de la suma, que impide inicialmente resolver con la misma facilidad expresiones de la forma $1 + N$ y $N + 1$. Con el tiempo y la experiencia, los niños llegan a entender que ambas expresiones producen el mismo resultado. Cuando esto sucede, habrán superado la concepción unitaria de la suma y habrán captado la irrelevancia del orden en el que se adicionan los sumandos (conmutatividad de la suma), es decir, la concepción binaria.

La sustracción se relaciona con las acciones de quitar, separar y comparar. Las dos primeras corresponden a un esquema parte-todo. En la última acción, uno de los conjuntos se considera parte del otro. La composición y descomposición de números contribuyen a desarrollar la relación parte-todo, uno de los más importantes logros en aritmética. Los niños deben de aprender primero que un conjunto consta de partes, que el todo es más que sus partes y que las partes hacen el todo. Más tarde, aprenderán que unos números se componen de otros (por ejemplo, los números 2 y 3 componen el 5, al igual que el 4 y el 1).

ACTIVIDAD 1: Supón que en tu clase los niños de 5 años están trabajando en un proyecto sobre la preparación de un día de excursión al campo. Propón cuatro situaciones en las que involucrarías a estos niños para que realizasen sumas y restas con números pequeños.

2.1. Estrategias de cálculo

Los niños son especialmente creativos para concebir y poner en práctica sus propias estrategias. Presentamos a continuación estrategias para la suma con diferente grado de sofisticación, identificadas en variadas investigaciones. Estas estrategias no necesitan ser enseñadas, sino que los escolares las van descubriendo cuando trabajan la resolución de situaciones problema mediante modelización. La sofisticación de las estrategias empleadas por un niño variará según los números a operar.

- *Modelado directo con objetos.* Hay varias formas de elaborar o utilizar este modelo:

  a) Construyendo dos colecciones de objetos (cada una para representar un sumando) contando los objetos ambas, juntando o no todos los objetos.
  b) Construyendo una colección correspondiente al primer sumando y aumentándola en tantos objetos como indique el segundo sumando.
  c) Construyendo una colección correspondiente al mayor sumando (primero o segundo) y aumentándola en tantos objetos como indique el menor sumando.

- *Secuencias de recuento.* Contando objetos que se supone que deben reunir sin realizar ninguna acción física y que pueden no estar presentes sino ser imaginados por el niño. Lo pueden hacer:

  a) Contando todos los objetos que indican los sumandos.
  b) Contando a partir del primero de los sumandos.
  c) Contando a partir del mayor de los sumandos.

  En estos casos suele usar los dedos para registrar el conteo de la segunda cantidad a la vez que continúa la secuencia numérica.

- *Datos (o hechos) numéricos recordados.* Utilizando combinaciones numéricas, como es la idea de doble o sumas, cuyos resultados conocen. Los niños suelen aprender con mayor facilidad las sumas de números iguales (3 + 3, 4 + 4) y las sumas que dan como resultado diez (a estos números se les denomina «complementos del diez» o «amigos del diez»). Estas estrategias implican, en ocasiones, particiones de números (véase cuadro 8.1).

Para la resta, se conocen diferentes estrategias desarrolladas por niños de educación infantil.

- *Modelado directo con objetos.* Se distinguen cuatro tipos de estrategias:

  a) Tomar tantos objetos como indique el minuendo e ir quitando tantos objetos como indique el sustraendo (quitando de).
  b) Tomar tantos objetos como indique el minuendo e ir quitando objetos hasta que queden tantos como indica el sustraendo; el recuento de lo que ha quitado dará el resultado (quitando hasta).
  c) Formar un conjunto que representa el sustraendo y añadir objetos hasta obtener el minuendo; el número de objetos añadidos es el resultado (añadiendo hasta).
  d) Emparejar los objetos que representan el minuendo y los objetos que representan el sustraendo y contar los objetos no emparejados para obtener el resultado (emparejamiento).

- *Recuento.* No se utilizan objetos físicos; se puede proceder de diferentes formas:

  a) Contar hacia atrás desde el minuendo tantas veces como indique el sustraendo (contar hacia atrás desde).
  b) Contar hacia atrás desde el minuendo hasta alcanzar el sustraendo, siendo el número de pasos dados el resultado (contar hacia atrás hasta).
  c) Contar desde el sustraendo hasta el minuendo (contar hacia delante desde).

CUADRO 8.1

Estrategia		Ejemplos para el cálculo 4 + 7		
Modelado directo con objetos	Modelado y unión	Primer paso	Segundo paso	Tercer paso
	Modelado y aumento del primer sumando	Primer paso	Segundo paso	
	Modelado y aumento del mayor sumando	Primer paso	Segundo paso	
Secuencias de recuento	Conteo total	1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (levantando un dedo por cada número que cuenta a partir de 5, incluido éste, hasta tener levantados siete dedos).		
	Contar desde el primer sumando	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 (levantando un dedo por cada número que cuenta, hasta tener levantados siete dedos).		
	Contar desde el mayor sumando	8, 9, 10, 11 (levantando un dedo por cada número que cuenta, hasta tener levantados cuatro dedos).		
Datos numéricos recordados		Cuatro y seis son complementos del diez, y siete es uno más que seis, entonces la suma será uno más que diez, once.		

- *Datos (hechos) numéricos recordados.* Utilizan algún hecho numérico que conozcan (véase cuadro 8.2).

Actividad 2: Explica cada una de las estrategias para el cálculo de sumas y restas que se han descrito anteriormente para el caso de la suma 2 + 9 y la resta 8 – 5.

Cada una de las estrategias implica una extensión del conteo y la puesta en juego de unas habilidades que hacen que aquéllas resulten más o menos elaboradas. Por ejemplo, «contar desde el mayor sumando», para el caso de la suma, implica identificar cuál es el mayor sumando a través de la comparación y contar a partir de un término determinado de la secuencia numérica. Para lograr que los estudiantes realicen esta estrategia de forma exitosa se recomienda comenzar con números menores que cinco y que uno de los sumandos sea uno. También es recomendable el uso de materiales manipulativos. Posteriormente, es adecuado aumentar el sumando para que ninguno sea uno e ir aumentando el tamaño de los números sucesivamente.

El dominio de algunas de estas estrategias produce beneficios en cálculos de nivel más avanzado y ayuda a crear otras estrategias más sofisticadas, como las que mencionamos a continuación.

CUADRO 8.2

Estrategia		**Ejemplos para el cálculo 5 − 3**	
Modelado directo con objetos	Quitar el sustraendo	Primer paso	Segundo paso
	Quitar hasta obtener el sustraendo	Primer paso	Segundo paso
	Añadir desde el sustraendo	Primer paso	Segundo paso
	Emparejar		
Recuento	Contar hacia atrás desde	Cuatro, tres, dos.	
	Contar hacia atrás hasta	Cuatro, tres.	
	Contar hacia delante desde	Cuatro, cinco.	
Datos numéricos recordados		Dos, porque tres y dos son complementos del cinco (tres y dos son amigos del cinco).	

- *Uso de hechos numéricos memorizados.* La tabla de la suma no se memoriza de forma expresa, pero con la realización de diferentes operaciones y mediante el trabajo con los números en distintos contextos aritméticos hay hechos numéricos que terminan quedándose en la memoria. El uso de estos hechos puede ser útil para realizar cálculos de forma rápida. Por ejemplo, saber que 3 + 2 es 5 puede ser útil para hacer el cálculo 13 + 2, dejando el 1 a un lado, sumando 3 + 2 (5) y, finalmente, poniendo el 1 que se había quitado anteriormente.
- *Números terminados en cero.* Cuando al menos uno de los números que se introducen en una suma termina en 0, se puede no tener en cuenta ese 0 y considerarlo para el resultado final.
- *Descomposición de números.* En ocasiones, puede resultar más fácil realizar un cálculo utilizando la descomposición de uno de los números. Por ejemplo, la sustracción de 12 − 9 puede realizarse mediante el siguiente razonamiento 12 − 9 = 10 + 2 − 9 = 2 + 10 − 9 = = 2 + 1 = 3.
- *Modificación de los dos datos iniciales y compensando.* Si la operación con los datos dados no resulta fácil, podemos modificar dichos datos, calcular y luego tener en cuenta la modificación para compensar el resultado. Para sumar 9 + 9, se puede hacer la suma de 10 + 10 y quitarle las dos unidades que hemos añadido a los datos iniciales (uno a cada sumando).
- *Compensación.* Con esta estrategia, se compensa uno de los números con el otro. La diferencia 13 − 8, se puede hacer a través del siguiente razonamiento: 13 − 8 = 15 − 10 = 5.

ACTIVIDAD 3: Muchos niños utilizan sus dedos para sumar o restar. Indica con cuáles de los grupos de estrategias anteriores se identifica este hecho.

3. REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS

Es fundamental en educación infantil no confundir el aprendizaje de los números y las operaciones con su lectura y escritura. Que los niños sean capaces de leer y reproducir números no implica que les den significado; de ahí la importancia de no reducir el aprendizaje de los números a su representación. Que un niño conozca el numeral (3) y la palabra numérica (tres) de un número no significa que conozca su significado. Los múltiples significados de un número son adquiridos progresivamente al estar asociados a contextos diferentes. Así, el número cinco puede significar para un niño el número que va antes que el seis, tres más que dos, un regleta Cuisenaire amarilla, el número de letras de su nombre, el último dígito del número de teléfono de su casa, la edad de su hermano, etc.

Existe evidencia empírica de que hay capacidades básicas verbales relacionadas con los números que preceden a algunas tareas no verbales, en oposición a lo que proponen los modelos mentales. Los niños muy pequeños tienen un conocimiento sobre la lectura o incluso la escritura de los numerales. Este hecho apoya la idea de que el aprendizaje de las palabras numéricas facilita el desarrollo de diferentes representaciones numéricas. Así, el lenguaje humano actúa como conexión entre diferentes formas de representación de los números. Hay casos en los que conviene no introducir los numerales hasta que los niños no den significado a los números, sucede cuando tienen un desarrollo más lento del previsto en el proceso de conteo.

La elección de la representación de los números no debe ser arbitraria. Los recursos manipulativos desempeñan un papel importante en este cometido. En el caso de la representación numérica, existen diferentes materiales, como las regletas de Herbinière-Lebert o los bloques multibase, que fomentan los agrupamientos de 10, la misma base del sistema decimal de numeración. Sin embargo, otras representaciones, como la digital, tienen la ventaja de trabajar con una parte del cuerpo del niño, pero, al usar los dedos de las manos, se trabaja formando grupos de cinco.

La representación escrita de cantidades tiene un papel secundario en educación infantil y no se recomienda introducirla hasta el segundo ciclo. Conviene utilizar grafismos diferentes de los numerales convencionales como primeras representaciones de

los números como representar el uno con un segmento vertical. Para introducir la notación numérica habitual, se aconseja atender al proceso evolutivo desde la motricidad gruesa hasta la fina. Esto implica hacer recorridos sobre la grafía en el suelo, utilizar papeles que no supongan una limitación de espacio, usar pintura de dedos, pasar a la escritura en papel con limitación clara e instrumentos de escritura convencionales.

Actividad 1: La canción cuyo comienzo es «El uno es un soldado» incide en la forma de los numerales del uno al diez. Busca dos canciones infantiles que también incidan en la grafía del número.

Entre los 3 y 6 años de edad, dependiendo de las condiciones socioculturales y el trabajo en las aulas de infantil, los niños aprenden a realizar representaciones escritas de los números, lo que les ayuda a desarrollar razonamiento numérico abstracto. La evolución de la representación de los números sigue un proceso lento (desde los 2-3 años hasta los 9-10 en las culturas occidentales) en el que representaciones convencionales y no convencionales conviven durante un tiempo. El niño ha de aprender a representar los números y también la idea de que un solo numeral representa varios elementos a la vez (con la excepción del 1 y el 0).

3.1. Palabras numéricas

Los niños encuentran con frecuencia las palabras numéricas en su vida cotidiana; algunos ejemplos son: su edad, la de sus hermanos o el número de su casa. Estas experiencias les llevan a aprender los nombres de los números por imitación de los adultos. Es habitual oír a los niños recitar la secuencia numérica con algunos saltos (por ejemplo, uno, dos, tres, cuatro, siete, quince, once), dado que es difícil recordar las palabras numéricas y el orden. Aprenden así los nombres de los números de forma similar al nombre de las letras, asociando el símbolo al nombre y no distinguiendo inicialmente entre letras y numerales.

A veces suelen tener dificultades en la pronunciación de algunos números. Es común que cambien «ce» por «se» en números como once o doce, sin que necesariamente esté vinculado al seseo. Esta dificultad se aumenta en el caso de dieciséis, donde aparecen los dos fonemas muy cercanos. También dicen dieciuno en lugar de once o diecidós en lugar de doce, si bien esto no supone una dificultad; simplemente han aprendido la lógica de la formación de las palabras que designan los números de dos cifras antes de aprender la secuencia numérica hasta el quince.

Actividad 2: Busca en la red información sobre «discalculia» y realiza un informe de 2.000 caracteres máximo.

3.2. Numerales

El aprendizaje de los numerales incluye identificarlos (es decir, saber leerlos) y escribirlos. Los niños suelen leer los símbolos antes de poder escribirlos. Se recomienda que la escritura de los numerales se inicie en educación primaria, aunque no es necesario retrasarla si se cree que en infantil están capacitados para hacerlo.

La tarea de escribir numerales requiere una alta concentración de los niños, motivo por el cual se recomienda trabajarla fuera de actividades matemáticas que requieran hacer uso de su pensamiento numérico. Asimismo, se recomienda que al trabajar la grafía de los números los alumnos dibujen junto a cada numeral tantos objetos como éste represente para favorecer la conexión entre el concepto de número y su representación. También se sugiere guiar a los alumnos para elegir el punto de partida y la dirección a seguir en el trazo. Un ejemplo lo observamos en la figura 8.7.

Los numerales del 11 al 20 se aprenden de forma similar a los del 1 al 10, sin distinguir unidades y decenas. El aprendizaje del valor posicional es más complejo que el de las palabras numéricas, motivo por el cual le sucede.



Figura 8.7.—Representaciones de los tres primeros numerales de la secuencia numérica con flechas para guiar su escritura.

Hay niños que tienen dificultad para reproducir correctamente la grafía de algunos números y tienden a escribirlos de forma opuesta a la propia (a modo de una imagen especular, véase figura 8.8). Ésta es una dificultad que se supera con el trabajo escolar y generalmente desaparece hacia los 7 años. La colocación de una marca en la parte del símbolo desde donde debe comenzarse el trazado ayuda a los escolares que persisten en esta escritura especular.

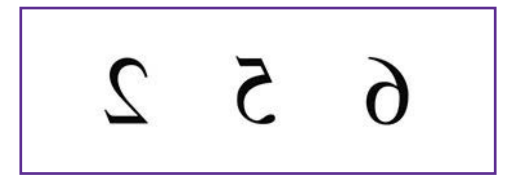


Figura 8.8.—Escritura especular de 2, 5 y 6.

La falta de desarrollo de la relación perceptivomotora deriva en una escasa habilidad para conectar lo que ven con lo que escriben, obstaculizando la escritura de los numerales. En algunos casos, las posibles dificultades que presentan los escolares tienen que ver con la evolución de la psicomotricidad gruesa a la fina, para lo cual se pueden realizar algunas tareas como las siguientes:

- Pintar con los dedos siguiendo un camino.
- Alinear objetos sobre una marca.
- Recorrer con los dedos las plantillas con los símbolos.
- Dibujar las cifras sobre algún material continuo.
- Moldear los símbolos con plastilina o arcilla.

En general, en lo que se refiere a la escritura de los numerales, se recomienda trabajar desde trazos que requieran la psicomotricidad gruesa en el plano vertical hasta llegar a la psicomotricidad fina en el plano horizontal.

4. EDUCACIÓN DEL PENSAMIENTO NUMÉRICO

En Infantil se forman los conceptos numéricos iniciales y se comienza el cálculo básico. El cálculo requiere nociones anteriores y relacionadas con él, como son la comparación, la equivalencia entre colecciones o el conteo. A todas esas nociones dedicamos los apartados siguientes.

4.1. Comparación y equivalencia

Antes de cumplir un año, los niños comparan conjuntos de objetos y establecen relaciones de equivalencia de conjuntos que tienen el mismo número de objetivos, de forma intuitiva. Para establecer esta igualdad según la cardinalidad de dos conjuntos, pueden utilizar las palabras numéricas, pero también representaciones no verbales de la cardinalidad, relacionando los objetos de una colección con los de otra colección con la que se esté comparando. Hay evidencias de que los niños establecen mejor la comparación entre conjuntos de igual que de diferente número de elementos. Actividades muy relacionadas con la equivalencia son: poner la mesa en la que hay que colocar un servicio para cada comensal, organizar el material escolar de forma que a cada escolar le corresponda el suyo, preparar la percha donde cada escolar colgará su abrigo, etc.

ACTIVIDAD 1: Presenta una situación en la que niños de 4 años deban emparejar elementos de dos colecciones que tienen diferente número de objetos.

Los niños de 3 años juzgan correctamente el aumento o disminución de objetos. Así, ante dos colecciones de igual cantidad, si aumentamos o disminuimos una de ellas la colección a la que se ha añadido contendrá más elementos que la no modificada y que la colección de la que se ha sustraído contendrá menos que la que no se ha cambiado. Si las colecciones de partida tienen diferente cantidad de elementos, suelen presentar dificultades para juzgar el efecto de un aumento o disminución, una habilidad que se desarrollará hacia los 5 años, cuando ya reconocen que la adición y la desigualdad inicial influyen en el estado final de la colección.

Algunas dificultades que los alumnos encuentran pueden deberse a que no se centran en las propiedades cuantitativas de la colección sino en el espacio que ocupan los objetos de la colección. Estos niños tienden a no identificar la equivalencia de dos conjuntos, incluso cuando contando el número de objetos obtienen el mismo resultado. En el sentido inverso, hay niños que son capaces de reconocer la equivalencia de dos colecciones pero no la relacionan con la igualdad del resultado tras el proceso de contar. Aparentemente tardan en aprender que los mismos números implican la misma numerosidad en las colecciones de los que son cardinales y que diferentes números implican diferente numerosidad. Los investigadores encuentran justificación a esta situación y esgrimen diferentes razones:

- Unos argumentan que la estructura de conteo y la estructura cuantitativa de comparación están diferenciadas en los primeros años y que hacia los 6 años de edad se integran en una sola.
- Otros concluyen que los niños consideran que las estrategias basadas en el conteo son complicadas (la de comparación, entre ellas).
- Otro grupo opina que el conteo tiene sentido en tareas situadas y que, en otros casos, toma más tiempo.

Los niños necesitan aprender sobre el significado del resultado de contar en diferentes situaciones, tales como comparar conjuntos o producir equivalencias.

Al realizar comparaciones entre conjuntos, se utilizan expresiones como «tantos como», «igual», «mismo número» y otras análogas y apropiadas en los casos en los que las colecciones tengan diferente número de elementos.

4.2. Conteo, adición y sustracción

Como hemos presentado anteriormente, el conteo es una acción básica y primordial para posteriores aprendizajes, como puede ser el de las operaciones aditivas, debido a las estrategias que permiten la realización de sumas y restas exitosamente.

Utilizar el conteo de cinco en cinco o de diez en diez e identificar patrones ayuda en la enseñanza de las operaciones aditivas. Por ejemplo, conocer la secuencia de 5-10-15-20 y que de un número se pasa a otro añadiendo 5 unidades puede ser útil a la hora de realizar la suma de 10 + 6 razonando que es uno más que 10 + 5, que saben que es 15.

ACTIVIDAD 2: Analiza la frase siguiente dicha a un estudiante, juzga si es correcta y cuál se supone que ha de ser la respuesta del estudiante: *Pablo, cuenta de dos en dos hasta doce.*

Hay niños con dificultades de razonamiento abstracto, deficiencias auditivas, visuales, de lenguaje o de memoria visual o secuencial a los que les puede resultar más complicado de lo habitual continuar un patrón de cinco en cinco o de diez en diez. Como consecuencia, pueden presentar mayores dificultades para la realización de sumas y restas. En estos casos, se recomienda reforzar el trabajo de patrones, comenzando por seriaciones cualitativas (por ejemplo, figuras geométricas) para después pasar a trabajar con patrones numéricos previos a las operaciones. El uso de la recta numérica o la tabla del cien puede ayudar a estos alumnos a identificar patrones numéricos. En la recta numérica (véase figura 8.9) se puede representar la secuencia de los números impares o contar de dos en dos desde el uno, dando saltos entre números y dejando en cada salto un número sin señalar.

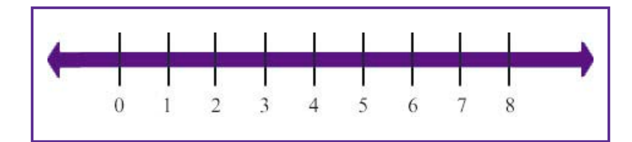


Figura 8.9.—Recta numérica.

En la tabla 100 (véase figura 8.10) se pueden identificar los múltiplos de 5 o de 10 por estar sombreados en diferentes tonalidades. También se puede sombrear con otro color la secuencia obtenida comenzando por un número y contando de dos en dos, dejando uno sin sombrear. Para educación infantil, la tabla 100 contiene más números de los que se suelen trabajar, pero la introducción de este recurso en el aula puede ayudar a representar visualmente diferentes patrones numéricos y su utilización en cursos superiores con otros objetivos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 8.10.—Tabla 100.

ACTIVIDAD 3: Indaga sobre cómo utilizar la recta numérica para realizar el cálculo de sumas y restas sencillas. Compáralo posteriormente con el modo en que dichas operaciones pueden ser realizadas con el apoyo de la tabla 100.
Prepara una actividad para que escolares de 5-6 años trabajen en la recta numérica.

Existen diferentes aproximaciones para la enseñanza de las operaciones aditivas. Una de ellas tiene que ver con la relación entre el conteo y estas operaciones. Cuando se introducen las ideas de adición y sustracción, es frecuente que los niños utilicen estrategias basadas en el conteo. Por ejemplo, que les demos una colección de tres objetos y otra de dos y, en lugar de utilizar la información del número de objetos de cada colección, junten los objetos y los cuenten. Las primeras situaciones tienen que ver con la idea de añadir o quitar una unidad, o, equivalentemente, el número previo o posterior.

Para favorecer el uso de estrategias cada vez más sofisticadas, el docente puede ir promoviendo que el niño no cuente las dos cantidades implicadas tapando una de ellas o ambas una vez han sido representadas o visualizadas.

4.3. Composición y descomposición

La composición aditiva de números, y la descomposición en suma de otros menores, es un ejercicio que refuerza la idea de número y contribuye al aprendizaje de las operaciones aditivas. Se introducen en educación infantil y, de forma intuitiva, se presentan algunas de las combinaciones que dan lugar a nuevos términos, pero la mayoría de estas normas para combinar los términos son objetivo del primer curso de educación primaria.

La enseñanza de estrategias de composición y descomposición involucra patrones espaciales (como la disposición de los puntos en un dado o en las plaquetas Herbinière-Lebert) o los dedos de ambas manos. Se aconseja mostrar rápidamente estos patrones y animar a los niños a razonar numéricamente sobre lo que han visto. En ocasiones, los patrones incluyen dos colores para facilitar la percepción de descomposiciones de un número. El uso del 5 y el 10 como puntos de referencia en las composiciones y descomposiciones es de gran utilidad dado que nuestro sistema de numeración es de base diez. El 5 se utiliza como punto de referencia para aprender los complementos del cinco. Así, los números comprendidos entre 6 y 10 se consideran cinco más algo. En la figura 8.11 mostramos ejemplos de casos en que se utilizan el 5 y el 10 como puntos de referencia.

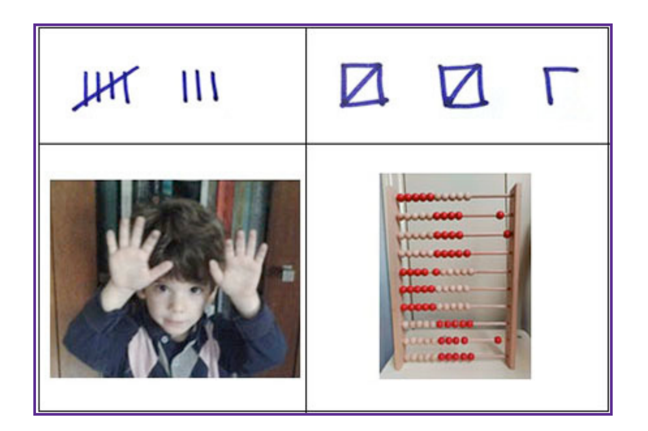


Figura 8.11.—Ejemplos con 5 y 10 como puntos de referencia.

La subitización conceptual es un caso importante de composición de números. Los niños pueden desarrollar, desde muy pequeños, una idea de conmutatividad primitiva y, a partir de ahí, una idea de composición, conmutatividad de grupos que se combinan.

Diversos autores identifican dificultades que los niños encuentran al realizar operaciones de estructura aditiva. Destacamos algunas asociadas a ciertas características de los números presentes en las operaciones que tienen implicaciones en el grado de dificultad que encuentran los estudiantes.

- Las dificultades aumentan conforme lo hace el tamaño de los números.
- Las sumas en las que el primer sumando es mayor que el segundo son más sencillas que aquellas cuyo segundo sumando es mayor.
- Las sumas con dos sumandos pares resultan más sencillas que las que presentan algún sumando impar.
- Las sumas con dos sumandos iguales son más sencillas que otras.

4.4. Primeras ideas de la estructura multiplicativa

La estructura multiplicativa es propia de la educación primaria. Sin embargo, en los años previos se introducen algunos términos en el vocabulario cuyos significados los escolares son capaces de asimilar. Términos como «doble», «triple», «tercio» o «mitad». También se trabaja el conteo salteado (de dos en dos, de diez en diez), aplicado a la cuantificación de ítems organizados en grupos de igual número de elementos. En estas edades pueden abordarse los dos significados de la división a partir de situaciones contextualizadas en las que sea necesario hacer un reparto o agrupamientos con igual número de elementos.

ACTIVIDAD 4: Propón dos situaciones en las cuales niños de 5 años realicen tareas de reparto sin que sobren objetos a repartir. Indica en esas situaciones cuatro preguntas que harías a los niños.

4.5. Resolución de problemas

La realización de operaciones aritméticas simples ha de estar ligada a la resolución de problemas que den significado a dichas operaciones; problemas que han de ser presentados verbalmente y en el contexto en el que se esté trabajando. La resolución de problemas aritméticos proporcionará a los niños beneficios en dos aspectos principales: comprender situaciones de la vida real y ver la estructura matemática de diferentes problemas en términos de operaciones aritméticas.

Existen tres niveles de abstracción en los que puede encontrarse un niño en la resolución de problemas aritméticos:

- *Nivel conceptual.* Necesidad de modelar la acción o las relaciones dadas en el problema a través de objetos físicos o utilizando su propio cuerpo. El niño utiliza materiales concretos y se expresa verbalmente.
- *Nivel de conexión.* Necesidad de utilizar materiales concretos y descripciones verbales. En este nivel, el niño añade algunos símbolos escritos. Tiende a dejar de representar físicamente las cantidades involucradas en el problema.

- *Nivel de abstracción.* Uso de algoritmos para llegar a la solución del problema sin necesidad de recurrir a representaciones concretas.

Las dificultades que puedan encontrar los niños en la resolución de problemas tienen que ver con diferentes factores. Uno de ellos es el tamaño de los números involucrados en el problema. También el tipo o la estructura del problema tienen implicaciones en la dificultad que puede suponer para el estudiante.

Existen algunas orientaciones en cuanto al orden de introducción de los diferentes tipos de problemas aditivos en educación infantil. Cambio-aumento, parte-todo con la cantidad desconocida en el total y cambio-disminución son los que suponen menos dificultad para los estudiantes porque pueden modelizar las acciones que representan. A continuación, se suelen plantear los de cambio-aumento con el cambio desconocido y los de parte-todo con la cantidad desconocida en una de las partes.

Los niños pueden resolver algunos tipos de problemas aditivos con estrategias de conteo (hacia delante o hacia atrás). Ésta es una de las ventajas de introducir las operaciones aditivas en relación con las estrategias de conteo, con las que están familiarizados. En otros casos lo pueden hacer por tanteo; es el caso de un problema de cambio-unión en el que se desconoce la cantidad que se une (3 + ... = 5) y se tantea qué número sumado con 2 da como resultado 5. Para la resolución de otros problemas se puede utilizar alguna propiedad de las operaciones. Por ejemplo, para problemas de cambio-unión en los que se desconoce la cantidad inicial (... + 2 = 5) puede ser útil cambiar la operación a una resta equivalente; este cambio de operación no es fácil para los niños. Los problemas de comparación presentan algunas dificultades propias, principalmente por el vocabulario empleado. Algunos niños interpretan «menos» como sinónimo de «más». Por ejemplo, si decimos «menos barato» o «más corto», los niños pueden confundir las expresiones con significados diferentes de los que tienen. Así, es importante que sean conscientes de que «menos barato» es equivalente a «más caro» y «más corto» es equivalente a «menos largo».

El vocabulario empleado en los problemas y cómo de cercana les sea la relación entre éste y las operaciones también influyen en la dificultad. La familiaridad del contexto al que haga referencia el problema también es un factor condicionante de su dificultad.

Alrededor de 4 años, los niños no aprecian la estructura parte/todo de los problemas de combinación. Tomarán el número más pequeño como respuesta para problemas de adicción y de sustracción. En contraposición, niños de 5 años más a menudo con un número mayor que el dado en problemas de adicción que de sustracción, responden con un número más pequeño cuando se trata de sustracción en vez de adición. Esto no quiere decir que los niños apliquen tal comprensión al hallar respuestas precisas en tareas aritméticas. La explicación menos pesimista es que el nivel de pensamiento exigido por la relación parte/todo no es accesible a niños de los primeros grados. El profesor debe ayudar a los niños a llegar a la comprensión de la relación parte-todo para estos tipos de problemas.

5. RECOMENDACIONES PARA LA ENSEÑANZA

En este apartado presentamos algunas orientaciones útiles para planificar tareas destinadas a la enseñanza y aprendizaje de contenidos numéricos en educación infantil.

La resolución de problemas resulta una actividad especialmente importante para abordar los contenidos numéricos en esta etapa.

Algunas experiencias de los niños pueden ayudarles en la adquisición de contenidos numéricos; por ejemplo:

- Vivenciar aspectos cuantitativos a través de su cuerpo.
- Utilizar cuentos, canciones y otros recursos populares como dichos o refranes en los que aparezcan elementos cuantitativos contextualizados.

- Favorecer la acción sobre objetos para facilitar la construcción de esquemas de conocimiento relativos a los números y las operaciones.
- Comparar, clasificar y ordenar cantidades de elementos diferentes para ir superando la independencia de la percepción.
- Utilizar soportes técnicos una vez superada la fase de experimentación y manipulación.
- Proponer situaciones que fomenten la estimación de cantidades sin necesidad de tener el material delante.
- No conceder demasiada importancia a la enseñanza de los simbolismos escritos.
- Expresar oralmente las observaciones, las acciones y los descubrimientos cuantitativos, destacando lo que aportan los aspectos cuantitativos en los razonamientos.
- Potenciar las estrategias iniciales de los niños, no basadas en algoritmos, y ayudarles a construir y adaptar sus creaciones.

En el caso del primer ciclo de educación infantil (0-3 años), las actividades que se propongan deben permitir a los niños descubrir las diferentes dimensiones de los aspectos cuantitativos, entre las que se encuentran:

- La dimensión numérica para iniciar la construcción de significados del número.
- La dimensión social, que ayuda a conocer valores sociales.
- Dimensión lingüística, que permite utilizar las cantidades como un recurso cultural comunicativo.

Las actividades para proponer a los niños de 3-6 años se pueden estructurar en tres grupos:

- Identificar, definir y/o reconocer cantidades.
- Relacionar cantidades.
- Operar cantidades.

El primer grupo de actividades pretende que los niños identifiquen los cuantificadores básicos (muchos, pocos, todos, ninguno, algunos, etc.) y cantidades elementales. Este grupo de actividades pretende que observe los aspectos cuantitativos de su entorno, manipule y experimente con cantidades. La representación escrita de cantidades tiene un papel secundario. Se pueden plantear actividades de reconocimiento de cantidades o de agrupaciones de elementos por criterios cuantitativos.

En las actividades de relación entre cantidades se pretende que los niños comparen y relacionen agrupaciones de elementos. Inicialmente, no conviene utilizar objetos muy diferentes entre sí para que la supremacía de la percepción no influya en la cantidad.

Las actividades sobre operación de cantidades se refieren al cálculo aritmético. La finalidad es que los niños adquieran las nociones de añadir y sustraer de una forma significativa y adecuada a sus necesidades. La intención no es que los niños repitan ejercicios del tipo 1 + 2 = 3. Se busca la realización de actividades significativas en las que encuentren sentido a las operaciones que no tienen que representar simbólicamente.

6. EJERCITA TU APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1: Busca varias canciones que permitan trabajar cada uno de los siguientes componentes del aprendizaje de los contenidos numéricos:

a) El recitado de la secuencia numérica hacia adelante.
b) El recitado de la secuencia numérica hacia atrás.
c) Los numerales.
d) El conteo.

ACTIVIDAD 2: Busca información sobre el material denominado Rekenrek (*arithmetic rack,* en inglés). Describe su estructura y su utilidad para el desarrollo del pensamiento numérico.

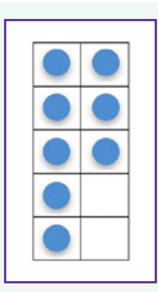
ACTIVIDAD 3: Diseña una actividad que tenga como objetivo la introducción de la grafía de los números para un niño con deficiencia visual.

Actividad 4: Diseña una adaptación de las plaquetas de Herbinière-Lebert para un niño con deficiencia visual.

Actividad 5: Diseña una actividad para el trabajo de la secuencia numérica para un niño con deficiencia auditiva.

Actividad 6: Diseña una actividad para ayudar a un niño a superar las dificultades que tiene para el conteo de una colección de seis objetos.

Actividad 7: La siguiente representación en una plaqueta de Herbinière-Lebert permite reconocer las siguientes relaciones del 8 con otros números: 3 más que 5, 2 menos que 10, 1 menos que 9, 2 más que 6, entre otras. Representa, de al menos dos formas diferentes, los números del 5 al 10 utilizando una plaqueta de Herbinière-Lebert e indica aquellas relaciones numéricas que permite reconocer cada una de las representaciones obtenidas.



Actividad 8: Compara las regletas de Cuisenaire con las plaquetas de Herbinière-Lebert para el trabajo de conceptos numéricos y presenta las ventajas e inconvenientes de cada uno de esos materiales para trabajar:

a) La secuencia numérica.
b) El aspecto ordinal del número.
c) El conteo.
d) Composición y descomposición de números.
e) Noción de agrupamiento en colecciones de diez elementos.
f) Paridad de los números.

9 Medida

JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ
ENRIQUE CASTRO

Victoria y su mamá pasean por su ciudad.
Victoria: *¡A mí me gustan las escaleras de la regla!*
Mamá: *¿Escaleras de la regla?*
Victoria: *¡Sí!*
La mamá tardó un tiempo en comprender que
su hija se refería a las escaleras mecánicas del *metro*.
(Victoria, 5 años)



Figura 9.1.—Victoria y sus instrumentos de medida.

Hacer un recorrido por las acciones cotidianas de un día de nuestra vida nos permite percibir la presencia de las magnitudes en nuestro quehacer diario y apreciar la importancia que la medida tiene en un desarrollo normal de ésta.

Por ejemplo. Ester es la madre de una familia y además desarrolla trabajo remunerado fuera de su domicilio. La descripción que recogemos corresponde a algunas situaciones por las que pasa durante un día laborable.

A las seis suena el despertador, se levanta y prepara el desayuno para toda la familia (café con leche, zumo y tostadas); mide el zumo y la leche para preparar lo justo. Se ducha y ha de graduar la temperatura para que el agua esté como le gusta. Despierta a sus hijos considerando el tiempo necesario para que desayunen, preparen sus cosas y no lleguen tarde al colegio.

Cuando sale de trabajar, antes de recoger a los niños, pasa por el supermercado, donde compra 3 kilos de naranjas, 5 litros de aceite y 2 metros de lazo para hacer un cinturón a un vestido de su hija. Paga con un billete de 20 € y comprueba la vuelta. Su hijo sale del colegio y quiere llevar a casa una maqueta que ha hecho. Ester intenta meterla en el maletero pero la base de la maqueta es mayor que la del maletero y, además, choca en la parte superior, cuando éste se cierra, de modo que ha de poner la maqueta en el asiento del copiloto.

En estos dos cortos episodios de la vida de Ester, han estado presentes varias magnitudes: tiempo, capacidad, temperatura, peso, longitud, dinero, superficie y volumen.

Quizá sea esa presencia de las magnitudes en la vida de las personas lo que hace que se considere la medida (referida a las magnitudes) como un medio que permite organizar el mundo que nos rodea; esto provoca, a su vez, que el estudio de algunas magnitudes esté incluido en los currículos oficiales. Muchas de las competencias asociadas a la medida no se alcanzan durante la educación infantil; no obstante, es posible iniciar a los escolares en tareas que potencien la emergencia de dichas competencias.

Este capítulo tiene como objetivo dar algunas nociones sencillas sobre ciertas magnitudes que se trabajan en la escuela por considerar que los maestros de educación infantil no pueden ser ajenos a estos conocimientos ya que muchos de ellos van a facilitar el desarrollo de su trabajo educativo.

1. MAGNITUDES. ATRIBUTOS CUANTIFICABLES

Los objetos que nos rodean poseen una serie de atributos que podemos percibir e identificar mediante los sentidos de forma directa o bien indirectamente empleando alguna técnica o instrumento. Estos atributos pueden ser de varios tipos y entre ellos se encuentran: peso, color, dureza, grosor, volumen, forma, temperatura, textura, densidad... Si por ejemplo observamos una mesa en una exposición de una tienda, podemos percibir atributos como su altura, su largo, su ancho, su color, el espacio que ocupa o la forma que tiene y podemos interesarnos por su peso y su coste. Si ponemos nuestra atención en otros objetos, son otros los atributos que se pueden identificar; por ejemplo, de un cristal podemos destacar su transparencia, brillo, dureza o fragilidad.

ACTIVIDAD 1: En la colección de objetos que aparecen a continuación, identifica diferentes atributos. Intenta hacer alguna clasificación de dichos objetos según los atributos identificados.



Detectar diferentes atributos en los objetos es una de las primeras capacidades que se adquieren en la vida.

Algunos atributos de los objetos se pueden percibir directamente, como la forma, el color o el brillo, pero para la percepción de otros se requiere que se realicen comparaciones entre objetos o eventos distintos. Ejemplo de este último caso es la dureza de un material; sabemos que el diamante es más duro que el cristal, puesto que al frotarlo sobre éste lo raya; así que frotar ha sido la técnica empleada para comparar la dureza de dos materiales.

La técnica que se emplea para comparar dos objetos tomando un atributo suele ser propia de cada atributo. Para el caso de la masa, o peso, puede utilizarse una balanza de platillos si los objetos son manejables. Expresiones como «más que», «menos que» o «tanto como» se emplean usualmente cuando se establecen ese tipo de comparaciones.

Las actividades de comparación, de acuerdo a un atributo, permiten decidir si dos objetos lo poseen o no y si son iguales o no respecto a él. Si son iguales, podemos considerarlos de la misma categoría o clase, y si son distintos, podemos ordenarlos o seriarlos de acuerdo con el criterio que proporciona el atributo.

Cuando un mismo atributo lo presenta más de un objeto, en algunos casos puede combinarse respecto a la totalidad de los objetos. Así, un libro y un

teléfono móvil, ambos tienen un peso, pero si calibramos los dos con una sola mano, lo que percibimos es el peso conjunto de ambos. En este caso el peso de los dos objetos se suma. Sin embargo, si juntamos dos objetos con diferente dureza, al unirlos esa cualidad no se altera.

Aquellos atributos de los objetos que permiten ser comparados y sumados se denominan magnitudes. Una magnitud es un atributo, una cualidad de los objetos que se puede cuantificar. A este tipo de atributos también se les denomina mensurables (que se pueden medir).

Actividad 2: Describe atributos cuantificables en cada uno de los objetos o eventos que siguen. Para cada uno de ellos razona por qué alguien puede necesitar cuantificar ese atributo.

a) Una piscina.
b) Un coche.
c) Un partido de fútbol.
d) Una alfombra.
e) Una esfera de plomo.
f) Una tienda de chuches.

Actividad 3: Toma la pieza más pequeña del tangram e indica qué atributos tiene. Compárala con las demás e indica cuáles de esos atributos coinciden. Clasifica las piezas del tangram de acuerdo a un atributo y establece una seriación entre sus distintas piezas.



Actividad 4: Ordena por la cualidad tamaño los elementos de las colecciones siguientes:

a) Silla, mesa, sofá, taburete, banco.
b) Perro, gato, cocodrilo, canario, ballena.

Actividad 5: Piensa en dos objetos cotidianos que puedas ordenar de dos maneras diferentes resultando uno de ellos mayor que el otro. Describe el atributo en el que basas el orden en cada caso.

1.1. Cantidad de magnitud

La noción de cantidad de magnitud se sustenta en el valor de un atributo compartido por una serie de objetos distintos. Al considerar un conjunto de objetos que presentan un atributo común, surgen diferentes categorías al agrupar todos aquellos que presenten el atributo con igual grado. Cada una de esas categorías es una cantidad de magnitud. De este modo, en la figura 9.2 los segmentos que están agrupados tienen igual longitud, por lo que hay cuatro cantidades de longitud distintas.

A las categorías distintas que surgen de considerar que un conjunto de objetos posee un atributo con igual intensidad, se les llama cantidades.

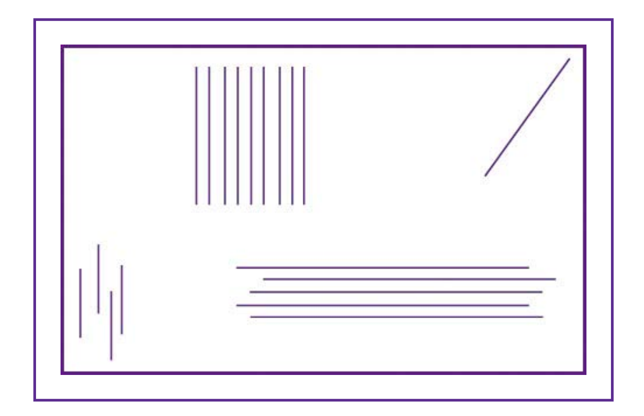


Figura 9.2.—Cuatro cantidades de longitud.

1.2. Medir

Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra cantidad de la misma magnitud, que

se fija como unidad de medida, y comprobar las veces que la cantidad inicial contiene a la unidad. Así, si queremos medir el largo de una mesa (cantidad de longitud), podemos tomar el palmo o cuarta (unidad de longitud) y comparar el palmo con el largo de la mesa para conocer cuantas veces cabe la unidad (palmo) en la cantidad a medir (largo de la mesa).

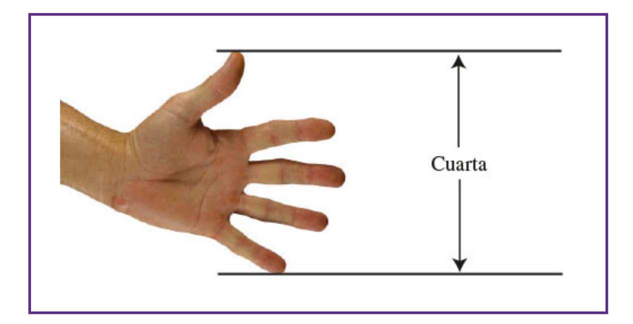


Figura 9.3.—Cuarta o palmo.

El resultado de la medición de un objeto es su medida, que está compuesta por el número (cantidad) y la unidad empleada. Cuando las unidades de medida tomadas son las estándar, se expresan con el número y las abreviaturas de la unidad de medida, por ejemplo 6 m (seis metros), 14 kg (catorce kilogramos).

Supongamos que tenemos una cuerda y nos interesa medir su longitud. Seleccionamos una unidad de medida apropiada, puede ser el metro. Llevamos el metro sobre la cuerda tantas veces como sea posible. Ésta es una actividad de comparación multiplicativa en la que obtenemos las veces que la longitud del objeto a medir contiene al metro. La unidad de medida actúa de referente y la longitud a medir es el comparado. En la figura 9.4 se representa una cuerda y su medida, que es 3 metros. La longitud a medir es tres veces la longitud del metro.

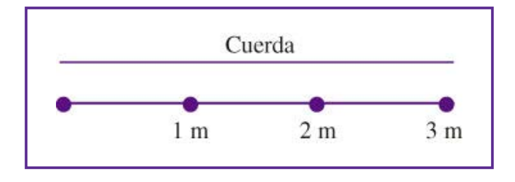


Figura 9.4.—Medida de una cuerda.

La mayoría de las ocasiones la longitud a medir no equivale a un número entero de metros, como ocurre en la figura 9.5, donde hay un trozo sobrante que es menor que la unidad de medida. Para medir el trozo sobrante se recurre a la *equipartición* de la unidad. La unidad se divide en partes iguales (diez en el sistema métrico oficial) y se utiliza una de esas partes como nuevo referente de una nueva comparación. La relación entre la nueva unidad establecida y la unidad de partida es una relación multiplicativa de parte-todo.

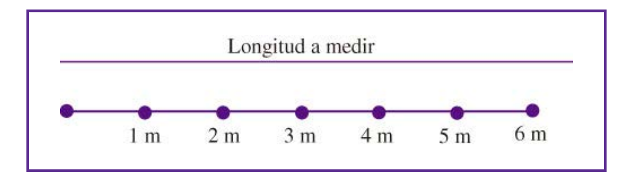


Figura 9.5.—La longitud es mayor que seis metros.

Así pues, en la medida confluyen y se ponen en juego dos esquemas básicos de pensamiento: el esquema de comparación y el esquema parte-todo en su versión multiplicativa.

Las unidades de medida han de ser adecuadas a la cantidad que se quiere medir. El palmo es adecuado para medir el largo de la mesa pero puede no serlo para medir el largo de la clase; en este caso es más apropiado tomar la zancada. El metro es adecuado para medir el largo del pasillo, pero no lo es para medir la distancia entre dos ciudades, cuya unidad ha de ser mayor, por ejemplo el kilómetro. Cuando la unidad es demasiado pequeña para la cantidad que se quiere medir, se recurre a unidades de mayor tamaño.

ACTIVIDAD 6: Describe, razonadamente, un objeto adecuado y otro no adecuado para ser utilizado como unidad de medida de la longitud de un lápiz.

1.3. Referentes convencionales para medir

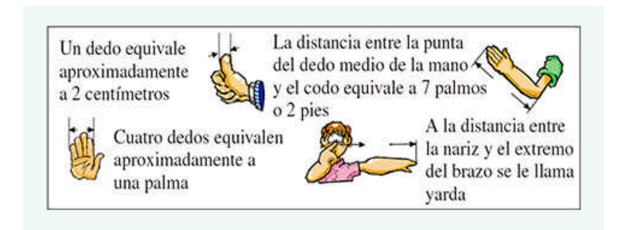
Desde las más antiguas civilizaciones la medida ha sido una necesidad inherente a múltiples activi-

dades humanas como la agricultura, el comercio o la industria, entre otras. Desde los primeros momentos se observó la necesidad de un patrón de referencia para los intercambios comerciales: unidad monetaria, unidad de peso para sólidos, unidad de capacidad para líquidos, unidad de longitud para expresar distancia, unidad de superficie para la medida de tierras, etc. A lo largo de la historia, los distintos pueblos han establecido sus propias unidades de medida para los atributos más usuales organizados en sistemas no completamente regulares. Progresivamente se ha producido una unificación de todas ellas en el sistema internacional de unidades, lo que ha facilitado la actividad comercial y la comunicación social entre los distintos países.

El sistema métrico de unidades que utilizamos actualmente y mediante el cual hablamos cotidianamente de metros, kilogramos o segundos es relativamente reciente: se ha ido adaptando y mejorando en los últimos doscientos años. Anteriormente las unidades de medida no eran comunes, cambiaban de un país a otro, de una región a otra, de una comarca a otra, incluso de una ocupación a otra. Esto provocaba confusión e incomodidad en las actividades comerciales, en las manufacturas, y por supuesto dificultaba la difusión del conocimiento científico. Aunque en algunos lugares siguen utilizándose antiguas unidades (fanega, arroba, etc.), de manera no oficial el progreso ha hecho que su uso sea muy reducido.

Actividad 7: Busca el significado de *fanega y arroba* y establece alguna conversión con otra unidad de medida convencional. Busca otros ejemplos de unidades poco usadas en la actualidad. Consulta con gente mayor de tu lugar de nacimiento qué unidades solían emplear usualmente y descríbelas.

Actividad 8: Busca en Internet la equivalencia de las siguientes unidades de medida en el sistema métrico decimal: *pulgada, yarda, milla, pie* y *codo.* Encuentra un referente en tu cuerpo o en tu entorno más cercano o bien una relación aritmética sencilla que te permita recordar, aproximadamente, esas equivalencias.



En el sistema métrico decimal internacional se consideran tres magnitudes básicas: longitud, peso (o masa) y tiempo, así como otras magnitudes derivadas de ellas. La unidad de medida de longitud es el metro. Aunque se definió originalmente como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre, finalmente se estableció en 1889 como la longitud de una barra de platino iridiado, que se encuentra en París. Desde 1960 se adoptó una nueva definición de metro que no se emplea en las matemáticas escolares[1].

Igual ocurre con la unidad de medida de peso (y masa); originalmente se definió a partir del peso de un decímetro cúbico de agua pura a su densidad máxima (unos 4 °C), pero finalmente se estableció también a partir de un patrón de platino iridiado. Aunque en la actualidad esto sigue teniendo vigencia, el kilogramo sólo se establece para la magnitud masa, pues, como veremos, el peso es una fuerza e implica unos valores locales de la fuerza de la gravedad que no son constantes en distintos puntos de la Tierra. Como medida del tiempo se adoptó el segundo, que fue definido inicialmente como la fracción 1/86400 del día solar medio entre los años 1750 y 1890. Pero actualmente se establece en términos de tiempo atómico a partir de un átomo de cesio.

Actividad 9: Haz un listado con las unidades de medidas básicas y con los múltiplos y submúltiplos de éstas más habituales. Indica la abreviatura con la que suelen expresarse.

[1] El metro se define como 1.650.763,73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación naranja del átomo del criptón 86.

Actividad 10: Describe al menos tres sucesos u objetos en los que puedas encontrar las siguientes medidas:

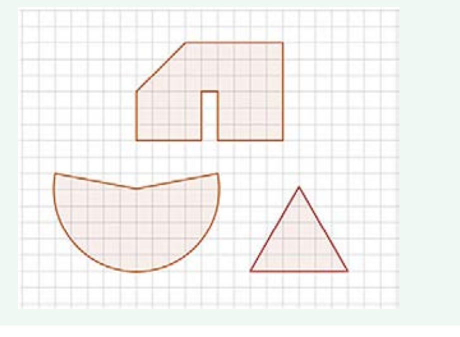
a) Un tiempo de 1 s.
b) Una longitud de 5 cm.
c) Un peso de 1.000 kg.
d) Una superficie de 5 m^2.
e) Una capacidad de la tercera parte de 1 l.
f) Una altura de 7 m.
g) Un recipiente capaz de contener 1.000 l.

1.4. Referentes no convencionales para medir

Para medir cantidades de magnitudes, previo al conocimiento y manejo de unidades de medida estandarizadas, se pueden emplear unidades no convencionales que, inicialmente, proceden del propio cuerpo. Así, es posible medir la altura de una persona o longitudes de objetos con palmos o pasos, o se puede introducir la unidad de medida de superficie con técnicas de recubrimiento, como por ejemplo expresar el área de la superficie de la pizarra usando hojas de papel. Si además se modifica el tamaño de esas hojas, se obtienen diferentes medidas de una misma cantidad de superficie.

Como una generalización de la técnica de recubrimiento con hojas de papel, con el uso de cuadrículas se puede introducir un sistema más consensuado para medir superficies de formas muy variadas.

Actividad 11: Usa la cuadrícula de la imagen para decir cuánto mide (lo más exactamente posible) la superficie y el perímetro de las siguientes figuras geométricas.



1.5. El proceso de medir

El proceso de medir conlleva una serie de acciones y toma de decisiones que recogemos en este apartado de forma organizada.

1. *Seleccionar un objeto y un atributo del objeto a medir*. Los objetos poseen varios atributos que pueden ser medidos (longitud, área, volumen, peso, capacidad, temperatura, etc.); lo primero que hay que hacer es determinar ese atributo en el objeto concreto sobre el que vamos a medir. Si el objeto es una barra cilíndrica, podemos medir su longitud, su área, su volumen y su peso (masa). Si la barra es hueca, podemos medir su capacidad.
2. *Elegir una unidad de medida apropiada*. La unidad que elijamos debe cumplir una serie de requisitos:

   - Debe ser adecuada para el atributo que se quiere medir. No hay una unidad de medida universal para todos los atributos. La unidad de longitud no es la misma que la de capacidad o peso. Cada atributo distinto requiere unidades medida distintas.
   - Es arbitraria. Para cada atributo se pueden utilizar distintas unidades de medida. Por ejemplo, la longitud se puede medir en pulgadas, palmos, pies, brazas, leguas, yardas, metros, centímetros, kilómetos, millas, etc.
   - La unidad de medida debe ser apropiada para el tamaño del objeto que se va a medir. El centímetro o la pulgada son apropiados para medir longitudes de objetos como la pantalla de la televisión, pero para la distancia entre ciudades son más apropiadas unidades mayores como el kilómetro o la milla.
   - El número con el que se expresa el resultado de medir el atributo que estamos midiendo es inversamente proporcional al tamaño de la unidad de medida utilizada. Si utilizamos una unidad de longitud que

es doble de larga que otra, el número que resulta al medir será la mitad del que se obtuvo con la primera. En la figura 9.6, si medimos el segmento AB con la unidad u, obtenemos doce unidades (12u), y si lo medimos con el segmento v, que es el doble de u, obtenemos 6 unidades (6v).

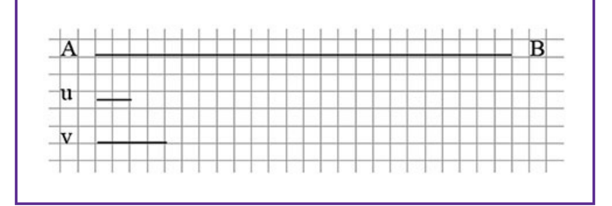


Figura 9.6.—Uso de dos unidades para medir.

3. *Comparar el objeto con la unidad de medida* para determinar el número de unidades necesarias. (Esto puede requerir el empleo de un instrumento de medida.)
4. *Expresar el número de unidades y el nombre de la unidad*. El número que resulta de la comparación de una cantidad con una unidad depende del tamaño de ésta; por ello la medida de un objeto debe expresarse mediante un número y la unidad correspondiente.

1.6. Medida directa y medida indirecta

La medida directa es aquella que se obtiene aplicando un instrumento directamente sobre la cantidad que se quiere medir. Cuando medimos una cuerda con una cinta métrica, estamos realizando una medida directa.

La medida indirecta es aquella que se obtiene mediante una fórmula (expresión matemática), previo cálculo de las cantidades de magnitud que intervienen en la fórmula por medidas directas. Un ejemplo sería calcular el volumen de una habitación. No siempre es posible realizar una medida directa, las razones pueden ser múltiples, otras magnitudes fácilmente medibles que lleven generalmente mediante un cálculo a la medida buscada. También, si se desea medir la altura de un ente difícilmente accesible (árbol, edificio, poste), es conveniente hacer una medida indirecta. Un procedimiento adecuado es colocar en las proximidades un objeto vertical (puede ser una persona), cuya altura y sombra sí se puedan medir con facilidad, así como la sombra del ente considerado (figura 9.7). Dada la gran distancia del Sol a la Tierra, los rayos solares los podemos considerar paralelos, lo que permite aplicar una relación de proporcionalidad entre las medidas de la sombra del objeto y su altura, que es la misma relación que guardan la sombra del edificio y su altura (desconocida). Una regla de tres permite conocer la altura del edificio.

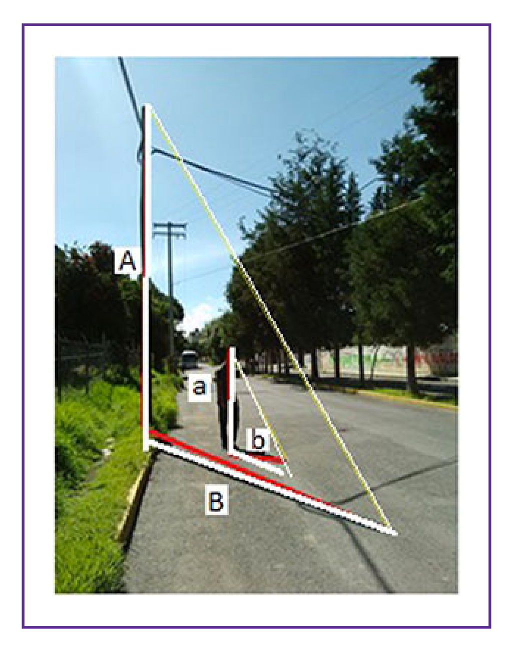


Figura 9.7.—Medida indirecta de longitud.
(FUENTE: isserendipity.blospot.com)

ACTIVIDAD 12: En el proceso de medir la sombra de un objeto indirectamente, como se indica en el párrafo anterior, también hay medidas directas. Señala dónde se hacen medidas directa y la magnitud que se mide.

2. MAGNITUDES EN EL CURRÍCULO ESCOLAR

Las magnitudes básicas que se incluyen en el currículo escolar son: longitud, superficie, volumen (muy relacionadas con la geometría), peso (masa), capacidad y tiempo.

2.1. Longitud

La longitud es una magnitud lineal (de una sola dimensión) que se emplea para responder a preguntas como: ¿a qué distancia están esas ciudades? ¿Cuánto mide de largo y de ancho esa mesa? ¿Cuánto mide el sendero? Es una magnitud de uso cotidiano que se identifica en las distancias entre dos puntos, en las dimensiones de los objetos y en las trayectorias o recorridos (figura 9.8).

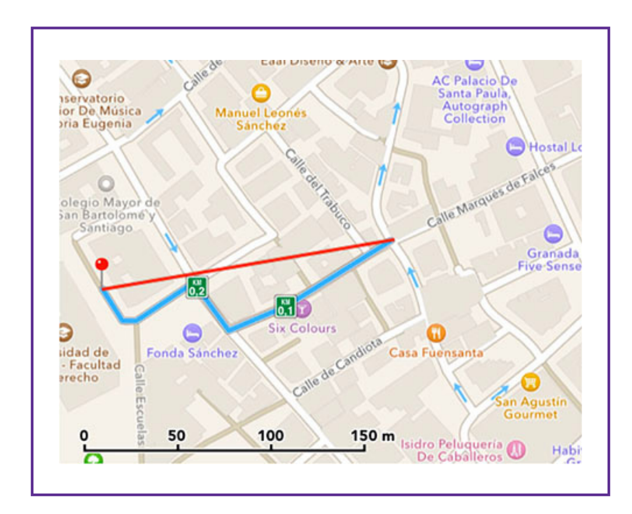


Figura 9.8.—Distancia entre la calle Gran Vía y la Plaza de la Universidad y recorrido por Granada que las une.

La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. En la mayor parte de las ocasiones en las que hablamos de la distancia entre dos puntos, solemos referirnos al camino que hay que recorrer para llegar de uno a otro. En ese caso, nos referimos a otro uso de la magnitud longitud: el de trayectoria que realiza un móvil (véase figura 9.9). Como podemos comprobar, la distancia entre dos puntos suele ser siempre más corta que el recorrido a seguir para llegar de uno al otro sitio.

ACTIVIDAD 1: Investiga en un mapa de la península ibérica hecho a escala dónde están situados dos puntos entre los cuales se encuentra la mayor distancia posible. ¿Cuál sería la distancia real? ¿En qué provincias están situados? Usa alguna aplicación para calcular la longitud del recorrido que hay que realizar para ir de uno a otro de esos puntos en un automóvil.



Figura 9.9.—Cuantificación de la longitud de un recorrido.

Al referirnos a las dimensiones de objetos, solemos emplear varios términos para determinadas

longitudes. Las parejas de adjetivos largo y corto, ancho y estrecho, alto y bajo o grueso y delgado, entre otras, se usan asiduamente con ese sentido (figura 9.10).

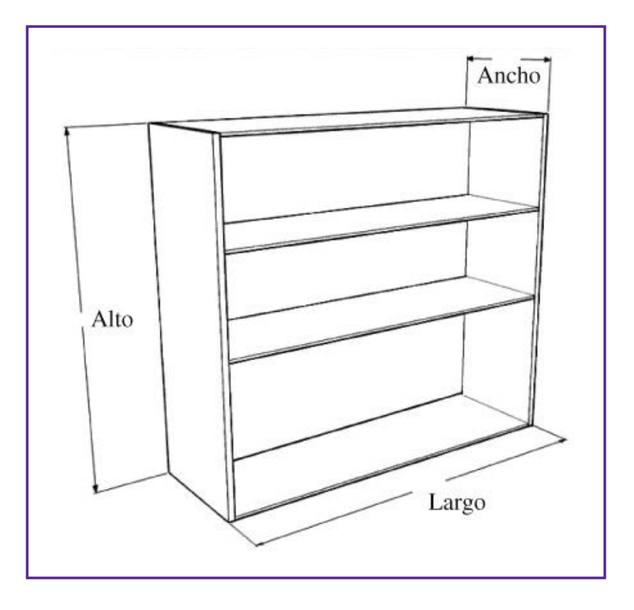


Figura 9.10.—Longitudes en dimensiones de objetos.

Actividad 2: Compara tu altura con tu envergadura (longitud entre los extremos de los dedos de las manos, cuando la extremidad superior está en máxima extensión y colocada a la altura de los hombros). ¿Cómo son entre ellas? Compara el resultado con algunos compañeros.

La unidad de medida de referencia para la longitud es el metro, si bien muchos múltiplos suyos, como el kilómetro, y submúltiplos, como el centímetro, son de uso habitual.

Actividad 3: Con las regletas Cuisenaire los escolares pueden realizar clasificaciones y seriaciones a partir de actividades de comparación. Investiga las distintas cantidades que se pueden formar según su longitud.



Actividad 4: Reflexiona sobre las siguientes cuestiones:

1. ¿Son lo mismo longitud y altura?
2. Si la unidad de medida de una longitud es el metro, explica por qué son necesarios los centímetros.
3. Razona si los centímetros son adecuados para medir objetos de cualquier longitud. Pon ejemplos y contraejemplos.

2.2. Superficie

La magnitud superficie expresa la extensión bidimensional, que delimita una línea plana cerrada o contorno.

En la geometría del plano toda línea cerrada delimita una figura cerrada cuya superficie se puede medir. En las matemáticas escolares referirnos a una superficie implica que la figura está sobre un plano, sobre una cara de un cuerpo plana o sobre su desarrollo. En una superficie se consideran sólo dos dimensiones: largo y ancho.

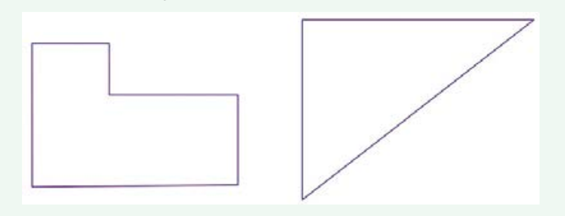
La superficie está relacionada pero es independiente de otros atributos que pueden tener los objetos, como su forma o su perímetro (longitud del contorno). De hecho, aunque la superficie es una magnitud bidimensional y el perímetro, que corresponde a una longitud, es unidimensional, es habitual que los escolares tiendan a confundir superficie y perímetro.

Las actividades de comparar superficies contribuyen a su delimitación y a distinguirlas de otros atributos y sientan las bases para posteriormente realizar medidas con referentes adecuados. No obstante, la comparación directa de superficies por superposición no siempre es posible. Esto sólo se puede hacer si son formas especiales.

ACTIVIDAD 5: Dibuja cinco formas geométricas distintas, recórtalas e intenta compararlas de forma directa por superposición. ¿Cómo podemos compararlas si no lo hacemos directamente?

Los términos «área» y «superficie» están asociados, y a veces se los considera sinónimos, si bien área expresa la medida precisa de una superficie. La unidad de medida que se emplea, y que es de referencia para la magnitud superficie, es el metro cuadrado.

ACTIVIDAD 6: Un constructor quiere adquirir uno de los dos solares que aparecen a escala en las dos figuras siguientes. Quiere comprar el de mayor superficie. Indaga para conocer cuál de las dos superficies tiene mayor área.



Las superficies más fácilmente medibles son aquellas que presentan un contorno poligonal, con lados rectos. En los casos en que no sea así, se hará una aproximación de la medida. Para las superficies de figuras con lados rectos, aquellas que son figuras geométricas, es más cómodo realizar una medida indirecta, basada en la medida de la longitud, que utilizar una unidad de superficie cuadrada e ir reiterándola para comprobar cuántas veces cabe en la superficie a medir. Así, para conocer cuál es el área de un terreno rectangular, se mide la longitud de sus lados y se realiza el cálculo pertinente que proporciona el dato del área o medida del rectángulo.

ACTIVIDAD 7: Normalmente se toma como unidad de medida una superficie cuadrada. Justifica este hecho. Indica cómo se relaciona con las fórmulas que permiten conocer el área de figuras geométricas planas.

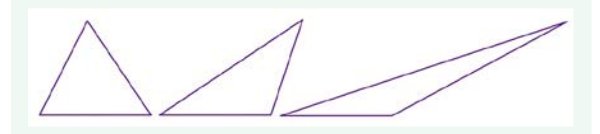
ACTIVIDAD 8: Partiendo de la descripción hecha en el apartado 1.2, justifica si es posible tomar como unidad de medida una superficie triangular o de cualquier otra forma.

ACTIVIDAD 9: Un dormitorio tiene forma rectangular, con 4 metros de largo y 3 de ancho. Decidimos cambiar el suelo y poner baldosas y zócalo nuevos. ¿Cómo podemos expresar las medidas de la superficie del suelo y de la longitud del zócalo? ¿A qué magnitudes corresponden? ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre estas dos magnitudes?

ACTIVIDAD 10: Dibuja dos figuras que tengan la misma superficie pero perímetro diferente. Haz lo mismo con dos figuras de igual perímetro pero con distinta superficie.

ACTIVIDAD 11: Usa GeoGebra para encontrar el rectángulo que con un perímetro de 16 centímetros encierra la mayor superficie posible.

ACTIVIDAD 12: Compara la superficie de estos tres triángulos y decide si son iguales o distintas.



2.3. Masa/Peso

Masa y peso son dos magnitudes con significados muy relacionados, pero diferentes. La masa de un objeto es la cantidad de materia que posee. No depende del punto de la Tierra en el que se encuentre. El tamaño de un objeto no es determinante para

su masa. Dos objetos con igual masa pueden tener formas y tamaños distintos. Así, por ejemplo, un objeto de plomo con una determinada masa ocupa menos espacio que un montón de papel con esa misma masa.

El peso de un objeto es la fuerza con que la Tierra lo atrae debido a la gravedad. El peso de un objeto varía según el lugar de la Tierra en el que se pese y depende de que el lugar en el que se pese diste más o menos del centro de la Tierra. La masa de un objeto es la misma en todos los puntos de la Tierra, pero pesará menos a nivel del mar que en la cumbre de una alta montaña, ya que el peso expresa la fuerza con la cual la Tierra atrae al cuerpo, que depende del valor de la gravedad.

Actividad 13: Haz una búsqueda de Internet y calcula cuánto pesarías en la Luna y en algún otro planeta del Sistema Solar.

La masa de un objeto no la podemos percibir directamente, pues cuando lo sostenemos lo que percibimos es su peso, la fuerza con la que la Tierra lo atrae. La balanza tipo Roverval, o de columna, permite comparar la masa de dos objetos y decidir si es igual o una mayor que la otra (figura 9.11). Colocados los dos objetos, uno en cada platillo, el que tiene más masa hace que el platillo en que está colocado baje.



Figura 9.11.—Balanza para comparar masas de objetos.

2.4. Volumen

El volumen de un objeto es el espacio que ocupa. Si pensamos en un cuerpo que ocupa un determinado espacio, el hueco que dejaría al quitarlo corresponde con su volumen. Por tanto, todos los cuerpos tienen volumen. El volumen es una magnitud tridimensional. La unidad estándar de volumen es el metro cúbico, esto es, el espacio que ocupa un cubo que tiene 1 metro de lado.

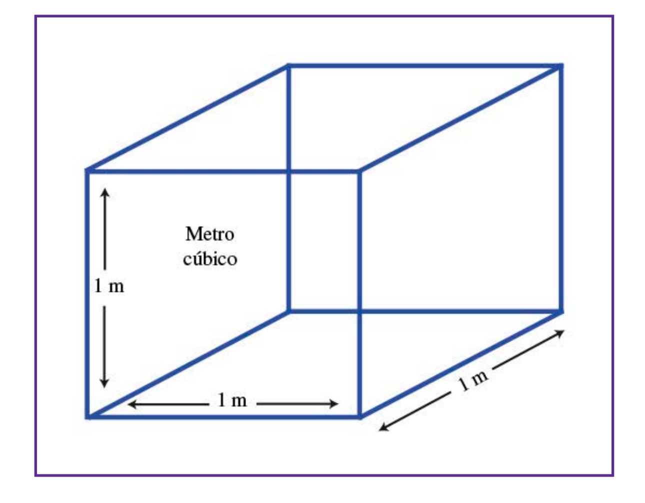


Figura 9.12.—Representación de un metro cúbico.

Actividad 14: Señala tres objetos que tengan un volumen similar.

2.5. Capacidad

La capacidad es propia de aquellos objetos que permiten almacenar, en su interior, líquidos o cualquier sustancia considerada no discontinua (harina, arcilla, arena muy fina, etc.). A estos objetos se les denomina «recipientes». Ejemplos de recipientes son: una botella, un vaso, una bañera, una cuchara.

Las magnitudes capacidad y volumen son distintas, si bien están muy relacionadas. La capacidad de un recipiente constituye la cantidad de líquido o árido que puede contener ese recipiente; esa capaci-

dad es distinta del espacio que ocupa el recipiente, es decir, de su volumen. La unidad de referencia del volumen es el metro cúbico, mientras que la unidad de capacidad es el litro. Entre estas unidades de medida hay equivalencia, ambas están relacionadas. Un litro es la capacidad de un recipiente o contenedor cúbico cuyo volumen es un decímetro cúbico.

El tratamiento y consideración de la capacidad como magnitud y la inclusión para su estudio en el currículo escolar son culturales y se deben a su presencia comercial y su ubicuidad social.



Figura 9.13.—Unidades de medida de capacidad.

Actividad 15: Describe el uso que haces de las magnitudes volumen y capacidad en las situaciones siguientes. Indica si empleas alguna otra magnitud.

a) Has cocinado pasta, pero después de comer te ha sobrado y decides guardarla para otro día. ¿Qué tamaño de recipiente usas para conservarlo?

b) Debes elegir un tamaño de papel de regalo para envolver por separado una caja de zapatos y un estuche con un reloj.

c) En una receta hay que usar una medida de aceite y no tienes un vaso medidor que se ajuste.

d) Tienes que guardar paquetes de diferentes tamaños en el maletero de tu coche.

Actividad 16: Cuando compras una botella de 2 litros de refresco, puedes comprobar que la botella nunca está llena hasta arriba. ¿Crees que estás comprando justo ese volumen de refresco y que la botella tiene más capacidad, o que la botella tiene 2 litros de capacidad y que viene un volumen menor de refresco? ¿Cómo podrías comprobarlo?

Actividad 17: Supón que tienes un bidón de 3 litros de capacidad y otro de 5 litros. Indaga sobre la manera de tener en este último la cantidad exacta de 4 litros. Explica cómo lo harías, si es posible, o por qué es imposible lograrlo.

2.6. Tiempo

El tiempo es una magnitud fundamental que tiene un uso cotidiano y fuertemente arraigado en contextos personales, sociales y científicos. El tiempo es una magnitud especial algo diferente de las otras magnitudes que venimos considerando. A pesar de estar omnipresente en nuestra vida diaria y de que todo el mundo comprende lo que es, el tiempo no se percibe directamente a través de los sentidos. Somos conscientes del paso o el transcurrir del tiempo y nos da la impresión de que camina en una sola dirección.

Al no ser directamente percibido, al igual que con otros atributos, las comparaciones de sucesos que tengan igual y distinta duración son la base para construir el concepto de tiempo. Al tiempo no le asignamos un origen absoluto, pero sí establecemos momentos como puntos de partida relativos para controlar las duraciones.

La unidad de medida del tiempo en el sistema internacional es el segundo. Pero sus unidades son complejas al no asociarse a objetos físicos. El tiempo se mide a través de eventos periódicos relacionados con la astronomía y contando cuántos de estos eventos periódicos transcurren de forma sucesiva mientras se desarrolla lo que se quiere medir.

Los eventos periódicos destacables que se toman para la medida del tiempo son: el día, las fases de la Luna, el año, las cuales dan lugar al mes y a la semana. Algunos de estos eventos son de corta du-

ración, como el día, que se toma como base para construir los relojes, o de larga duración, como el año, a partir del cual se elaboran los calendarios.

El sistema de unidades de medida del tiempo no se ajusta al sistema métrico decimal. La conversión entre las unidades no se obtiene multiplicando o dividiendo por diez, sino que:

1 minuto = 60 segundos, 1 hora = 60 minutos, un día = 24 horas, una semana = 7 días.

Hay dos ocasiones apropiadas para medir el tiempo: los intervalos de tiempo o duración de un evento y las fechas. Los intervalos de tiempo o duración se refieren al tiempo que transcurre entre dos instantes dados. Las unidades para esta medida son varias: segundos, minutos, horas, días, semanas, meses, años, quinquenios, décadas, centurias, milenios. Cada una de estas unidades es apropiada para una situación concreta, dependiendo de la amplitud del período considerado.

La comparación de intervalos de tiempo debe ser independiente del momento en que se empieza a medir, y debe permitir también comparar eventos que no empiecen en el mismo instante.

Supongamos que queremos medir el intervalo de tiempo que tardan en hacer la carrera de 50 metros lisos varios estudiantes; el instante inicial es el mismo, y el orden de llegada se establece según el instante final. El orden de llegada marcará tiempos ordenados de menor a mayor, desde el primero hasta el último en la llegada. Pero si se mide el intervalo de tiempo que necesitan varios estudiantes del mismo curso para hacer sus tareas, no es necesario que se empiece a medir en el mismo instante.

Vinculada con la comparación, está la ordenación de sucesos: qué ocurrió antes, qué está pasando ahora y qué ocurrirá después. El conjunto de imágenes de la figura 9.14 muestra una secuencia estándar de sucesos para que los escolares los ordenen; tareas similares son habituales en el aula.

Por otro lado, el conocimiento y la descripción de horas, días, semanas y estaciones se articulan de manera estrecha con las vivencias propias de los niños. La sucesión regular de fenómenos naturales, como el día y la noche, las fases lunares o las estaciones, no sólo nos hace percibir el tiempo, sino que también nos da pautas para utilizarlos como unidades de medida de referencia. Al tiempo no le asignamos un origen absoluto, pero sí establecemos momentos como puntos de partida relativos para controlar las duraciones. La conversión entre unidades de medida de tiempo no forma parte de los contenidos de educación infantil, y la habilidad para leer la hora en un reloj también se desarrolla en primaria, pero ¿sabes tú cómo puedes asegurar que un reloj está estropeado si ves que la aguja horaria está en las ocho y la de los minutos apunta al número 7?

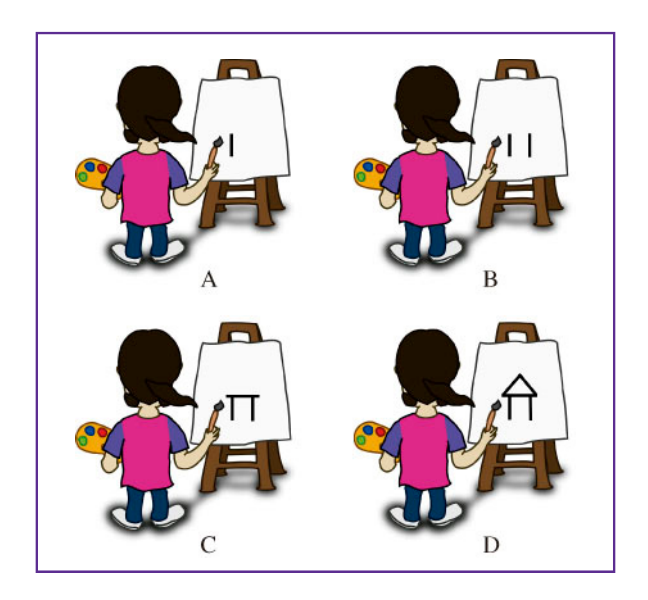


Figura 9.14.—Fichas para la ordenación de sucesos.



Figura 9.15.—Péndulo de Foucault.

Una unidad informal para medir el tiempo es la duración de la oscilación de un péndulo. Otra es el tiempo que tarda en vaciarse un reloj de arena, o un depósito con agua, o en consumirse una vela, etc.

Actividad 18: Calcula cuántas horas, minutos y segundos son 3.456 segundos.

Actividad 19: Haz un listado de los términos que podemos emplear para referirnos a la medida del tiempo y señala cuáles son los más habituales.

Actividad 20: Describe una acción o una situación que habitualmente dure un segundo, otra que dure un minuto y otra que consuma una hora.

Actividad 21: Analiza los siguientes refranes desde el punto de vista de la interpretación que se hace del tiempo: «El tiempo es oro», «el tiempo es el mejor maestro», «tiempo ido, nunca más venido». ¿Conoces algún otro ejemplo?

3. ESTIMACIÓN DE MEDIDAS

Estimar una medida es realizar una valoración de lo que mide un atributo. Esta valoración es un proceso que se realiza mentalmente, y vendrá mediatizada por las circunstancias del que la efectúa. Se trata de determinar una medida aproximada sin utilizar instrumentos de medida. En determinadas ocasiones es necesario obtener una medida y por alguna razón no es posible usar un instrumento. Esta circunstancia debe ser salvada por alguna estrategia alternativa, recurriendo en muchos de estos casos al proceso de estimar. En la vida real se le suele denominar medida realizada «a ojo».

Se tiene así una medida que pueda ser utilizada para cumplir con la finalidad concreta a la que va destinada y la aceptamos como tal aunque somos conscientes de que puede haber diferencias importantes entre lo que se mide y la medida que asumimos.

Actividad 1: Estima el volumen de un huevo de gallina. Indaga para comprobar lo acertado de tu estimación.

La medida estimada depende de las experiencias de las que disponga la persona que estima. Con la práctica las personas pueden llegar a ser estimadores competentes. Se dan consejos sobre técnicas que pueden promover el desarrollo de esa habilidad, como las siguientes:

- *Interiorización de las unidades básicas de medida:* la habilidad de hacer buenas estimaciones se refuerza si se tienen interiorizados determinados referentes personales o cercanos con los que comparar: metro, centímetro, milímetro, segundo, minuto, hora, kilogramo, litro.
- *Conocimiento de referentes,* es decir, de la medida de cantidades próximas: nuestra estatura, largo de un lápiz, longitud del palmo, del dedo, superficie de una baldosa, capacidad de un vaso, capacidad de una cuchara…
- *Dominio de técnicas indirectas:* conocer y aplicar fórmulas para el cálculo de longitudes, áreas, volúmenes...
- *Estrategias de comparación:* comparando con un referente aproximado, o bien con un referente que es un múltiplo o divisor de la cantidad que se estima.
- *Estrategias de descomposición/recomposición:* la cantidad que se estima puede ser descompuesta en partes diferentes para estimar cada parte y determinar su medida sumándolas.

Unida a estas técnicas, está la importancia de valorar la bondad de las estimaciones realizadas, con objeto de mejorar su precisión. Es recomendable que en las tareas de estimación se compare a posteriori cuánto se aproxima la estimación realizada al valor real.

Es importante destacar que las medidas que realizamos siempre son aproximadas. Cuando medimos un atributo procuramos que la diferencia entre lo que realmente mide el objeto y el valor que obtenemos al medirlo sea lo suficientemente pequeña como para que no distorsione la finalidad a la que queremos destinar esa medida. El uso de determinados instrumentos facilita llevar a cabo mediciones con mayor precisión. Pero en un gran número de ocasiones, o bien no disponemos de esos instrumen-

tos o la situación sólo exige una aproximación que no tiene que ser demasiado precisa; en estos casos, la habilidad de estimar cobra especial fuerza.

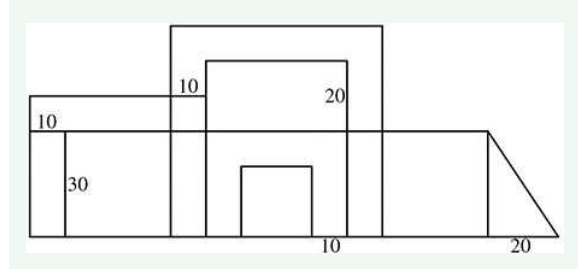
Actividad 2: Clasifica los siguientes enunciados como posibles o imposibles:

a) En una semana recorro andando unos 10.000 km.
b) El comedor de un piso mide alrededor de 20 m^2.
c) Al depósito de mi coche le caben 50 Hl de gasolina.
d) Llevé 10 litros de agua en un cubo.
e) Un elefante africano puede pesar alrededor de 7.000 kg.
f) Un buen atleta puede correr 100 metros en 10 segundos.

Actividad 3: Explica una forma de estimar el volumen de nuestra cabeza.

Actividad 4: Describe tres situaciones en las que una misma magnitud se mida con al menos cinco niveles de precisión.

Actividad 5: Calcular las medidas de todos los segmentos de la figura siguiente, a partir de los datos mostrados. ¿Hay alguna medida que no se pueda calcular con precisión?

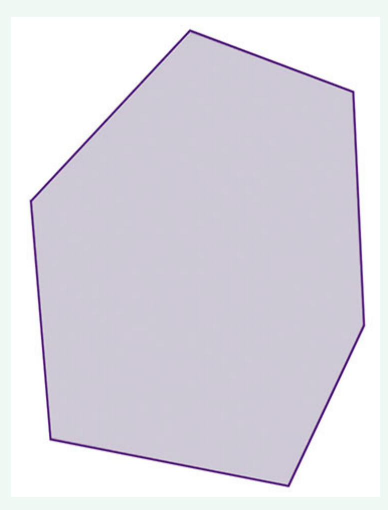


Actividad 6: Establece las medidas siguientes utilizando los referentes indicados en cada caso:

a) La altura de la puerta de tu clase usando la altura de una silla.
b) La superficie de la pizarra usando una hoja A4.
c) El volumen de tu cabeza usando pelotas de tenis.
d) El tiempo que dura un suspiro usando el tiempo entre dos latidos de tu corazón.
e) Lo que pesas usando lo que pesa tu teléfono móvil.

Actividad 7: Estima con la mayor precisión que puedas la superficie de la estancia en la que estás leyendo este libro. Describe la técnica que has aplicado en tu cálculo.

Actividad 8: Dibuja en GeoGebra un polígono parecido al siguiente. Después realiza las siguientes tareas:



a) Activa la cuadrícula y úsala para aproximar el área del polígono.
b) Cambia el tamaño de la cuadrícula para mejorar esa medida inicial.
c) Usa la herramienta de medida del programa y compara el resultado con tus medidas iniciales.

4. EJERCITA TU APRENDIZAJE

Actividad 1: Pon ejemplos de cualidades de objetos de la clase que sean magnitudes cuantitativas. Pon otros ejemplos que no lo sean.

Actividad 2: Explica qué te sugiere la expresión: «para medir, previamente hay que saber qué se mide».

Actividad 3: Indica cuáles de los siguientes atributos son cuantitativos: el sabor, la velocidad, la temperatura, la amabilidad, la calidad de una tela y la edad.

ACTIVIDAD 4: Enumera al menos tres magnitudes que sean comunes a los siguientes objetos:

a) Niño, perro y pez.
b) Mesa, coche, persona.
c) Vaso, caja y botella. Identifica en ellas cantidades de magnitud referentes a los objetos.

ACTIVIDAD 5: Responde por escrito a los siguientes interrogantes: ¿qué es magnitud? ¿Qué es cantidad? ¿Es lo mismo magnitud que cantidad? Define y relaciona los conceptos de magnitud y cantidad de magnitud. Pon ejemplos de cada uno de ellos, utilizando magnitudes que se trabajan en la clase de matemáticas.

ACTIVIDAD 6: Indaga en el currículo de Educación Infantil sobre las magnitudes que se recogen para su estudio.

ACTIVIDAD 7: La comparación de dos objetos respecto a una cualidad se puede realizar directamente o indirectamente, en este caso mediante un intermediario. Ejemplifica esta afirmación.

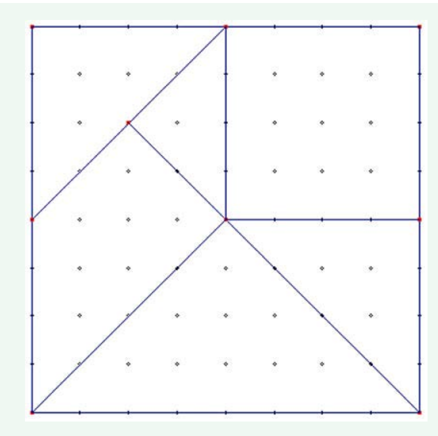
ACTIVIDAD 8: La longitud puede percibirse de formas diferentes: como espacio ocupado y como espacio vacío. Explica qué significa esto. Pon dos ejemplos. ¿Cuál de estas percepciones es más difícil?

ACTIVIDAD 9: Indica las distintas unidades de medida del sistema métrico decimal (SMD) y su relación con el metro. Explica la relación que existe entre el sistema métrico decimal y el sistema de numeración decimal. Considera y explica la relación entre las siguientes unidades: dm^3 y litro; litro de agua y kg; dm^3 y kg de agua.

ACTIVIDAD 10: Explica un procedimiento para establecer la distancia entre dos rectas o segmentos que sean paralelos.

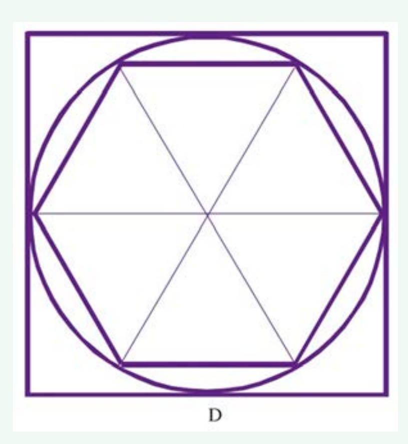
ACTIVIDAD 11: Dos cuerpos con la misma masa ¿pesan igual en cualquier punto de la tierra? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 12: La siguiente figura se ha construido a partir de un cuadrado descomponiéndolo en piezas. Enumera las piezas.



a) Si se toma el cuadrado de la cuadrícula de fondo como unidad de superficie. ¿Cuánto mide la superficie de las distintas piezas?
b) ¿Qué piezas tienen áreas iguales?
c) ¿Cuántas superficies tienen área distinta en este conjunto de piezas?
d) Empleando el menor número de piezas que necesites, construye una figura geométrica que tenga la mitad de área que el cuadrado de partida.

ACTIVIDAD 13: En la figura adjunta se representan una circunferencia, un cuadrado circunscrito y un hexágono regular inscrito. Si tomamos el diámetro de la circunferencia D como unidad de medida, ¿cuál es la medida del perímetro del cuadrado y del hexágono? ¿Y la longitud de la circunferencia?



ACTIVIDAD 14: Identifica las magnitudes relacionadas en los siguientes problemas, justifica que entre ellas existe una proporcionalidad, estudia de qué tipo es y resuélvelos.

a) En un hotel tienen carne para alimentar a 38 huéspedes durante seis días. Si se marchan 26 huéspedes, ¿para cuántos días habrá carne?
b) En una granja, 80 gallinas consumen 60 kg de pienso al cabo de una semana. ¿Qué gasto de pienso tendrán 60 gallinas durante un mes?
c) Cuatro máquinas siegan un campo de 800 ha en tres días. ¿Cuánto tardarán tres máquinas en segar un campo de 900 ha al mismo ritmo de trabajo?

ACTIVIDAD 15: Explica cómo pueden medirse de manera indirecta los siguientes elementos:

a) Longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
b) La longitud de un arco de circunferencia.
c) La amplitud del ángulo central de una circunferencia.
d) La longitud de una circunferencia.
e) La longitud de los catetos de un triángulo rectángulo.
f) La altura de un edificio.

ACTIVIDAD 16: Estudia cómo se obtienen las fórmulas de las áreas de cuadrados, triángulos, rombos, romboides, trapecios y polígonos regulares, a partir de la fórmula del área de un rectángulo, y explica en qué consisten y qué significa cada una.

a) Dibuja los diferentes tipos de trapecios que conoces y para cada uno de ellos toma las medidas necesarias usando una regla y calcula su área.
b) Repite la actividad anterior utilizando una hoja cuadriculada. En este caso utiliza el cuadrado de la hoja como unidad de medida y no uses la regla. ¿Qué tipo de medida has realizado en esta actividad y en la anterior?

ACTIVIDAD 17: Calcula el tiempo trancurrido entre un terremoto y su réplica, dos eventos que han sucedido el mismo día. En el momento en que sucedió cada uno de los eventos el reloj digital marcaba 1:35:07 y 13:23:46 respectivamente.

ACTIVIDAD 18: Justifica científicamente la razón por la cual cada cuatro años se establece un año bisiesto.

ACTIVIDAD 19: En los cajeros automáticos habitualmente se pueden obtener billetes de 20€ y 50€. Indica qué cantidades (múltiplos de 10) no se pueden sacar con esos billetes.

ACTIVIDAD 20: Razona con algunos de tus compañeros de estudio si el valor de los objetos (su costo) es una magnitud.

10 Pensamiento métrico

MARTA MOLINA
AURORA DEL RÍO

Jaime (3 años y medio), antes de salir para el colegio: *¿Mamá, ahora es mañana?*
Madre: *¿Por qué preguntas eso?*
Jaime: *Es que la «seño» dijo: mañana todos traeréis una fruta.*

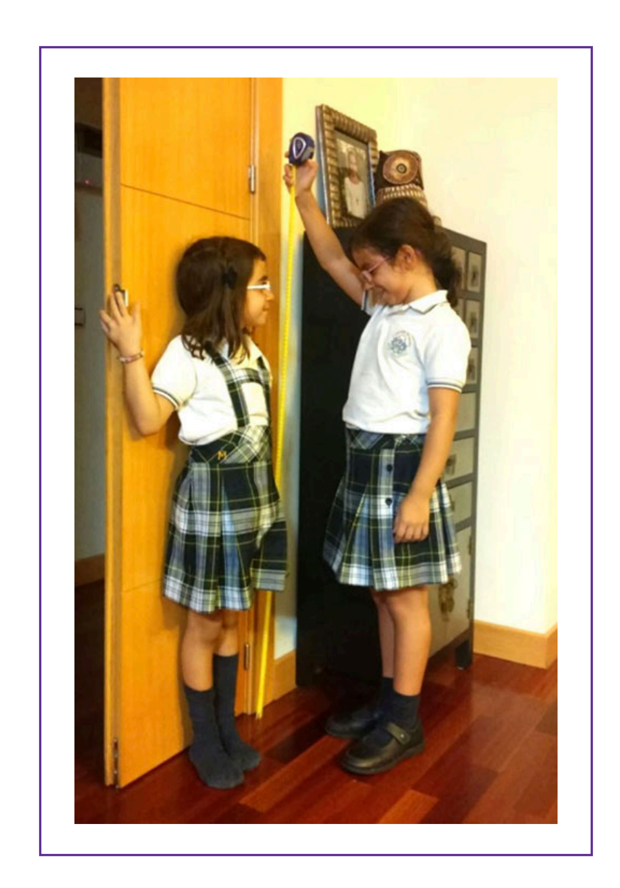


Figura 10.1.—Midiendo la altura.

Piensa por un momento en la forma en que has utilizado los números en los últimos días. Tal vez hayas indicado a alguien la distancia o el tiempo necesario para llegar a un determinado lugar o el número de cafés que has tomado. También has podido leer en algún envase el número de calorías, el peso o la fecha de caducidad de algún alimento. Estas observaciones te ayudarán a percibir que la medida es una de las aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana más ampliamente utilizada, lo que justifica su inclusión en el currículo escolar desde edades tempranas. De hecho, la medida es una de las actividades matemáticas comunes en todas las culturas, junto con contar, localizar, diseñar, jugar y explicar. Además, sirve de puente entre la geometría y el número, permitiendo reforzar conocimientos que los niños posean sobre estas otras áreas de la matemática, y resulta de gran utilidad en otras áreas del currículo como el arte, la música, la educación física y las ciencias (conocimiento del medio natural y social). También mediante el trabajo de la medida se contribuye al desarrollo del razonamiento y la lógica al establecerse relaciones entre diferentes objetos en función de una magnitud (atributo o cualidad cuantificable).

El pensamiento métrico incluye el reconocimiento de las magnitudes como atributos comunes a colecciones de objetos, la comparación y ordenación de objetos según dichas magnitudes, la interpretación de medidas expresadas de diferentes formas, el reconocimiento de unidades e instrumentos apropiados según la magnitud a medir y el uso de métodos e instrumentos de medida. Para la medida es esencial y previo el concepto de magnitud.

El niño, desde muy pequeño, comienza a percibir ciertos atributos en los objetos, de forma experimental. Compara los objetos respecto de estos atributos determinando qué objetos son iguales o cuál es más/menos que el otro en términos de este atributo (por ejemplo, más/menos ancho, más/menos pesado). Este comportamiento es aplicado a todos los tipos de magnitudes, si bien al referirnos al pensamiento métrico estamos centrando la atención en aquellas magnitudes mensurables/medibles, es decir, cuantificables, concretamente en la longitud, el peso (masa), la superficie, el volumen, la capacidad y el tiempo. Estas magnitudes son continuas, y su aprendizaje se diferencia en algunas peculiaridades que detallaremos cuando corresponda.

Este capítulo debe proporcionarte conocimiento sobre la capacidad de medir que adquieren los niños en las primeras edades y competencia para tu desempeño profesional relacionado con diferentes magnitudes que se trabajan en la escuela.

1. MEDIR EN LOS PRIMEROS NIVELES ESCOLARES

Medir no consiste únicamente en obtener un número asociado a una unidad de medida, requiere reconocer la magnitud que se está midiendo y seguir un proceso de comparación con la unidad de medida seleccionada que nos permita expresar la relación que existe entre la cantidad de magnitud a medir y la unidad de medida.

Así, por un lado, está el conocimiento conceptual asociado a la medida, que incluye adquirir experiencia con las principales magnitudes mensurables/medibles y desarrollar la noción de unidad de medida, y, por otro, el conocimiento procedimental que se refiere a las habilidades y procedimientos utilizados al medir las magnitudes estudiadas.

El principal reto en el aprendizaje de la medida para los estudiantes es vincular los procedimientos con la comprensión.

Entre los objetivos para la enseñanza de la medida desde los primeros niveles educativos destaca la importancia de que los niños descubran la necesidad de la aproximación en la medida y, por medio de ésta, conozcan mejor el entorno y medio natural en el que nos movemos. Piaget y sus colaboradores hacen las siguientes consideraciones como consecuencia de sus estudios sobre este tema:

- La medida no es un acto simple sino complejo.
- El acto de medir requiere experiencia en clasificaciones, seriaciones y estimaciones, sobre la magnitud a medir.
- Es necesario que el niño tome contacto desde edad temprana con situaciones que le lleven a discriminar las magnitudes de las colecciones de objetos.

Se percibe que el aprendizaje de la medida supone un largo proceso y está íntimamente ligado al desarrollo de habilidades perceptivas y motrices.

Para Piaget, son dos las operaciones fundamentales sobre las que se sustenta la comprensión del proceso de la medida: la conservación y la transitividad.

Conservación. La noción de conservación hace referencia a aquellos atributos de los objetos que permanecen invariables a pesar de sufrir ciertas transformaciones (que pueden revertirse en la mente) tales como su posición relativa o su fraccionamiento. Por ejemplo, en el caso de la longitud, percibir que un cordón enrollado y un cordón estirado tienen la misma longitud pone de manifiesto la conservación de la longitud. En el caso del peso, esta noción implica reconocer que el peso de una cantidad de azúcar no cambia porque abramos el paquete y lo vertamos sobre la mesa.

Transitividad. Esta operación consiste en que si un objeto tiene la misma cantidad de una cierta magnitud que otro objeto, y este segundo la misma que un tercero, entonces el primero y el tercero tienen la misma cantidad de esa magnitud. Así, por ejemplo, si el lápiz tiene la misma longitud que el bolígrafo y el bolígrafo la misma que el rotulador, el lápiz tendrá la misma longitud que el rotulador. La comparación indirecta de cantidades de magni-

tud y el uso de instrumentos de medida se basan en la idea de transitividad.

El niño muestra que ha comenzado a desarrollar las ideas de conservación y transitividad cuando utiliza algún instrumento intermedio para comparar cantidades de magnitud y comprende que, si ha usado más unidades para cubrir un objeto que para cubrir otro, el primero es más grande que el segundo.

1.1. Estadios de desarrollo de la comprensión del proceso de medir

En el desarrollo del conocimiento y comprensión del proceso de medición se distinguen cuatro etapas que describimos a continuación. No indicamos edades en las que se desarrollan estas etapas pues no existe uniformidad entre los individuos. Sí puede afirmarse que la adquisición de una etapa depende de la superación de las anteriores y que, aproximadamente, la longitud, la capacidad y el peso pueden ser comprendidos por los niños entre los 6 y los 8 años, la noción de superficie y de tiempo, entre los 7 y los 8, y el volumen, entre los 10 y 12 años, lo cual no impide que estas magnitudes comiencen a trabajarse desde la educación infantil.

Etapa 1. *Consideración y percepción de la magnitud.* El primer paso en el aprendizaje de la medida consiste en la identificación y comprensión de la magnitud como un atributo que posee una colección de objetos, sin tener en cuenta otros atributos que poseen dichos objetos. Por ejemplo, cuando un niño tiene una plastilina en sus manos, una opción es que sólo considere el peso, no su color, ni su textura, ni su tamaño. El niño experimentará una situación particular al sopesar el objeto y percibir su peso, diferente a cuando está atendiendo a otros atributos.

En otras palabras, la primera acción en la adquisición de la medida es percibir lo que se quiere medir. Para ello son esenciales la observación, la manipulación y la experimentación. La comparación y la ordenación de objetos según el atributo considerado son algunas de las acciones que el niño ha de llevar a cabo. Es necesario poner al niño en situaciones que requieran manipulación en el atributo fijado y le hagan experimentar con los objetos las propiedades de conservación y transitividad, así como la relación de orden en el atributo. El niño descubre de manera espontánea la diferencia de un objeto y otro mediante la comparación de alguna magnitud concreta (un objeto es más/menos corto que el otro, pesa más/menos que el otro). Al iniciarse en la longitud, clasifica objetos comparándolos con su cuerpo, pasando posteriormente a comparar los objetos entre sí.

En el caso de la magnitud tiempo, hay dos atributos de los sucesos a considerar: el tiempo de ocurrencia (instante en que ocurre un suceso en relación con la fecha del calendario, la hora del día, la estación del año...) y la duración (tiempo que transcurre entre el comienzo y fin de un proceso). Los bebés y los niños pequeños desarrollan una comprensión intuitiva del tiempo a través de los ritmos del día y la noche y la velocidad de las acciones y del movimiento (rápido/lento). El curso natural de los acontecimientos les ayuda a ser cada vez más conscientes del tiempo. No obstante, la percepción de esta magnitud está ligada a consideraciones afectivas, no sólo en la infancia sino también en la edad adulta. Es importante que el niño adquiera la idea de que el tiempo es un flujo continuo, sin relación con el tipo o cantidad de trabajo realizado o la distancia recorrida.

Una vez el niño percibe y distingue la existencia de períodos de tiempo diferentes, está preparado para fijar la idea de tiempo y considerar tiempos de ocurrencia. El tiempo de ocurrencia de un suceso puede precisarse indicando el día, mes, año e incluso estación del año en que tiene lugar. Para ello es necesario conocer el vocabulario relacionado con los días de la semana, los meses y las estaciones del año, vocabulario que no es previsible que el niño llegue a dominar en el período que comprende la educación infantil.

Actividad 1: Diseña actividades (al menos dos) que permitan centrar la atención del niño en la percepción de una magnitud concreta. Haz propuestas para cada una de las magnitudes que se trabajan en la educación infantil.

Etapa 2. *Conservación de una magnitud*. El atributo permanece constante aunque el objeto cambie de posición u orientación; por ejemplo, que el alumno constate que por más que el objeto cambie de forma, posición, color..., su peso no varía. Es normal que los niños tengan concepciones erróneas sobre la conservación de las magnitudes o sobre la relación entre éstas. Los niños tienden a pensar que la longitud, la superficie o el volumen de un objeto condicionan su peso. Estas concepciones erróneas van desapareciendo conforme progresan en su desarrollo cognitivo y tienen experiencias constructivas de aprendizaje.

La noción de conservación se va adquiriendo progresivamente, a diferente edad según la magnitud considerada: se comienza con la longitud y la capacidad, aproximadamente dos años después la conservación de peso, superficie y tiempo y, por último, el volumen.

En las primeras fases, el niño se apoya en estimaciones visuales. No cuantifica sino que hace una simple percepción sin tener en cuenta otras consideraciones. En relación con la longitud, ante la comparación de dos torres hechas con material manipulativo para concluir si poseen o no la misma altura, sólo atenderá a su cima, sin percibir que las bases pueden encontrarse a distinto nivel. En el caso de la superficie, inicialmente los niños tienden a compararlas tomando como referencia sólo las longitudes de los lados del objeto. Asimismo tienden a considerar que una superficie partida en dos es mayor que si está unida.

La conservación de la longitud ha sido objeto de mayor número de estudios que otros casos. Algunos resultados de las investigaciones son el establecimiento de etapas cuando los niños han de evaluar la igualdad de segmentos o trozos de líneas dibujados en papel.

En una primera etapa, el niño no evalúa la longitud de una línea (curva, recta o poligonal) según su forma, sino considerando cuáles son sus extremos. Así, por ejemplo, el niño dirá que las líneas de la figura 10.2A son desiguales en longitud, ya que sus extremos no están alineados, y que las longitudes de la figura 10.2B son iguales por coincidir sus extremos.



Figura 10.2.—Test de conservación de la longitud.

En una segunda etapa, sigue sin alcanzarse la idea de conservación, pues los niños interpretan que la magnitud se ve afectada por los desplazamientos. Así, consideran iguales las longitudes de la figura 10.3A y diferentes las de la figura 10.3B. También en esta etapa consideran diferentes longitudes que se encuentran en posiciones distintas, como las que se muestran en la figura 10.3C.

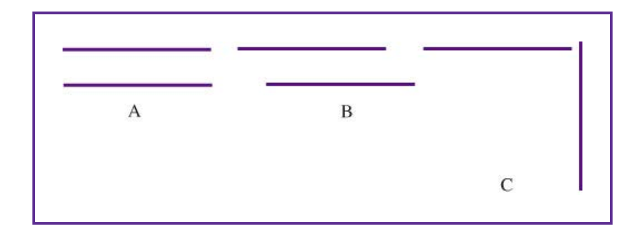


Figura 10.3.—Distintas posiciones de dos segmentos de igual longitud.

En la tercera y última etapa, independientemente de la forma o posición, los niños identifican las longitudes de las figuras 10.3A, 10.3B y 10.3C como iguales.

En las investigaciones centradas en la distancia, se ha puesto de manifiesto que la conservación de esta magnitud implica reconocer, en primer lugar, que la distancia entre dos puntos no varía a pesar de que se interpongan objetos. Inicialmente los niños interpretan que dicha distancia disminuye cuando se interpone un objeto entre ellos. Una segunda etapa implica aprender que la distancia entre dos puntos no depende del orden de los extremos, es decir, la distancia de A a B es la misma que la de B a A. En una última etapa, se reconoce que la distancia entre dos puntos es igual a la suma de las distancias de ambos a un punto intermedio.

ACTIVIDAD 2: Propón actividades basadas en el uso de la balanza de platillos que ayuden al niño a asimilar la conservación del peso (por ejemplo, utilizando plastilina, objetos encajables, recipientes rellenos de objetos).

Etapa 3. *Ordenación respecto a una magnitud dada.* Una vez desarrollada la noción de conservación, es posible la comparación de cantidades y el establecimiento de relaciones de equivalencia o de orden considerando un solo atributo. En cuanto al orden, los niños pueden hacer razonamientos del tipo «este lápiz es más/menos corto que este otro» o «este lápiz es igual de largo que éste», obviando otras características de los lápices como su color o peso (figura 10.4). Posteriormente incorporan a la comparación un tercer elemento (grande, mediano y pequeño) hasta llegar a conseguir la ordenación de más de tres objetos, que comenzará por ensayo y error. Establecen así equivalencias y no equivalencias entre cantidades de magnitud y, por medio de la propiedad transitiva, pueden ordenar varios objetos según la cantidad de magnitud que presente cada uno. Surge entonces la posibilidad de escoger un modelo de referencia (unidad de medida) y emplearlo para obtener una medida en función de ese modelo.



Figura 10.4.—Lápices de diferente longitud.

Se distinguen tres tipos de comparaciones de objetos que ayudan a construir comprensión de las magnitudes y que describen un desarrollo evolutivo en el niño: *comparación perceptualmente*, *comparación de forma directa* y *comparación de forma indirecta*. La comparación perceptual se realiza recurriendo a los sentidos, principalmente el de la vista, sin utilizar ningún otro objeto ni efectuar ningún desplazamiento. En la comparación directa el niño desplaza ambos objetos para situarlos pegados entre sí y compararlos de este modo o usa un objeto intermedio que aún no es una unidad de medida como alguna parte de su cuerpo (las manos, los pies, etcétera, en el caso de la longitud) para determinar cuál de las dos cantidades de magnitud es mayor. La comparación indirecta se realiza cuando los objetos no pueden disponerse uno junto al otro y es necesario el uso de objetos intermedios para disminuir la distancia visual y efectuar la comparación. Esta comparación indirecta es la que da paso al uso de unidades de medida.

Los niños hacen uso de la propiedad transitiva por comparación entre pares de objetos. Para ordenar una serie de objetos, a veces se basan en procedimientos de tipo recursivo. Buscan el objeto que presenta la mayor (o menor) cantidad de magnitud y proceden entonces a continuar comparando los restantes buscando de nuevo el de mayor (o menor) cantidad de magnitud, y así repetidamente.

Cuando se haya trabajado el proceso de medida y, por medio de él, se cuantifique la cantidad de magnitud de un objeto, entonces podrá vincularse la ordenación respecto de una magnitud con el orden de los números. Si se adopta la misma unidad de medida para medir dos cantidades diferentes de una misma magnitud, entonces la comparación u ordenación de dichas cantidades corresponden a las de los números resultantes de sus medidas.

ACTIVIDAD 3: Diseña varias actividades (al menos dos) en las que niños de infantil realicen ordenaciones que incluyan los tres tipos de comparación mencionados: perceptual, de forma directa y de forma indirecta.

Etapa 4. *Establecimiento de una relación entre la magnitud y el número.* A partir de que el niño es capaz de comparar dos objetos tomando uno de sus atributos mensurable, surge la posibilidad de escoger un modelo de referencia (unidad de medida) y emplearlo para obtener una medida en función de él. Asimismo, el concepto de número resulta esencial para trabajar con la medida. Esta cuarta etapa del desarrollo de la comprensión del proceso de medida implica la interiorización de las siguientes propiedades:

- El resultado de una medida debe incluir un número y la unidad. Toda medida exige una unidad, sin la cual no tiene sentido el concepto de medida.
- Dos medidas pueden compararse fácilmente cuando se utiliza una misma unidad.
- No hay una unidad única para medir una magnitud.
- Una unidad puede ser más apropiada que otra para la medida de un objeto.
- Hay una relación inversa entre el número de unidades necesarias para medir y el tamaño de la unidad.
- Las unidades estándar son necesarias para comunicar con eficacia la medida y permitir el entendimiento con otras personas.
- Unidades de medida más pequeñas permiten obtener medidas más precisas.

Para que el niño comprenda que para medir un objeto tiene que emplear repetidamente la unidad, ha de tener asimilada la idea de que una cantidad de magnitud puede ser descompuesta en partes. Ésta es una idea compleja para los niños dado que tienen que imaginar mentalmente que una cantidad de magnitud en un objeto se puede dividir en otras cantidades de esa magnitud. Por ejemplo, la altura de una persona se puede dividir en la altura de la cintura, la distancia de la cintura al cuello y la distancia del cuello al final de la cabeza. En el caso de la superficie, a lo largo de la educación primaria los niños necesitan estructurar una cuadrícula para entender la superficie como bidimensional. Es decir, necesitan entender cómo una superficie puede recubrirse por cuadrados dispuestos en filas y columnas. En el caso del volumen, el proceso es aún más complejo, pues se hace necesario estructurar el espacio en cubos dispuestos en filas y columnas. Aquellos dispuestos en una «capa» son más fáciles de percibir, pues se asemejan al caso de la superficie, pero, al considerarse varias «capas» de cubos, la percepción se complica porque algunos de ellos quedan escondidos a la vista por otros.

Rellenar espacios es un proceso complejo, pues no se puede dejar huecos ni solapamientos entre las unidades. Las unidades que pueden encajarse (por ejemplo, bloques ensamblables) son útiles en las primeras etapas de aprendizaje de este proceso. Es más sencillo iniciar con la iteración de copias iguales de una unidad de medida para, posteriormente, trabajar con una única copia de la unidad de medida y desplazarla. Este proceso no debe precipitarse, pues requiere que el niño mueva, marque y cuente al mismo tiempo.

La medida implica comprender que, cuando se está reiterando la unidad, el número de unidades contadas representa la medida de la cantidad de magnitud total. Dos ideas importantes a incorporar en este proceso son la necesidad de que las unidades sean iguales y que el tamaño de la unidad de medida debe ser considerado: cuanto mayor sea la unidad, menor cantidad de unidades serán necesarias para expresar la medida.

Algunos niños combinan unidades diferentes al realizar mediciones, interpretando los procesos de medida como procesos de conteo. En la medida de superficies, por ejemplo, se observa que los alumnos tienden a considerar las unidades como objetos que deben ser contados y no como subdivisiones del plano, dificultad que se constata incluso a finales de la educación primaria. Asimismo, al comparar dos medidas, a menudo atienden sólo al número. Por ejemplo, si un lápiz mide seis clips y otro mide dos regletas, concluyen que el primero es más largo porque seis es mayor que dos.

En la constitución de la unidad de medida se distinguen diferentes pasos que sigue el niño en su evolución. Las primeras comparaciones son carentes de unidad; como hemos mencionado, son de tipo visual. Posteriormente comienza a utilizar unidades ligadas a objetos, usualmente de forma y funcionalidad similares a las del objeto que quiere medir. Así, por

ejemplo, para medir la capacidad de un recipiente optará por utilizar recipientes de forma parecida a la de aquel cuya capacidad quiere medir. Un paso posterior consiste en elegir la unidad en función de sus dimensiones y no tanto de su forma, seleccionando unidades mayores cuando la cantidad de magnitud a medir es mayor. El paso a utilizar unidades que no guarden relación con el objeto considerado es progresivo, llegándose a seleccionar unidades iguales para todos los objetos. Elegir la unidad con la que medir es un arte que sólo se aprende con la práctica.

ACTIVIDAD 4: Propón actividades que de forma contextualizada permitan trabajar la idea de recubrimiento que se utiliza en la medida directa de superficies y longitudes.

A modo orientativo, se presentan en la tabla 10.1 algunos descriptores del progreso evolutivo de la comprensión de la medida en los niños, por edad, para el caso de las magnitudes longitud, superficie y capacidad.

TABLA 10.1

Progresión evolutiva de la comprensión de la medida de longitudes, superficies y capacidades

Edad	Longitud	Superficie	Capacidad
3	Identifica la longitud como un atributo. Entiende la longitud como un descriptor absoluto (por ejemplo, los adultos son altos) pero no comparativo.	Muestra poca comprensión del concepto de superficie. Utiliza estrategias de emparejamiento de lados para comparar superficies.	Identifica la capacidad como un atributo.
4	Realiza comparaciones directas e indirectas de longitudes de objetos.	Compara superficies utilizando sólo un lado de la figura o sumando longitudes de ésta. Es capaz de pavimentar espacios rectangulares con unidades cuadradas.	Realiza comparaciones directas de capacidades de objetos.
5	Ordena longitudes.	Estructura espacios rectangulares en cuadrículas con algunos errores de alineación y no muestra sistematicidad en el conteo de las unidades que recubren el espacio.	Realiza comparaciones indirectas de capacidades de objetos.
6	Cubre longitudes con copias iguales de una misma unidad, aunque puede no reconocer la necesidad de que todas las unidades tengan la misma longitud.		Muestra una comprensión parcial del recubrimiento de espacios con cubos.
7	Utiliza unidades idénticas y puede usar una regla. Relaciona el tamaño de las unidades y el número de estas.	Estructura espacios rectangulares en cuadrículas trazando rectas paralelas y es sistemático en el conteo de las unidades que recubren el espacio. Puede no requerir la total subdivisión del espacio rectangular para calcular el área. Conserva la superficie.	Emplea unidades para rellenar objetos y las contabiliza de forma precisa adoptando de forma progresiva estrategias más eficientes.
8	Demuestra haber interiorizado unidades de medida y el proceso de medición. Se mueve mentalmente sobre un objeto, segmentándolo y contando los segmentos. Utiliza la aritmética para medir y estimar con precisión.	Comprende el cálculo del área de un espacio rectangular a partir de la fórmula.	Comprende el cálculo de la capacidad de prismas rectangulares a partir de la fórmula.

ACTIVIDAD 5: Mario (4 años) tiene una pista de coches que decide llevar a casa de su amiga Julia para jugar. Intenta disponer la pista encima de una mesa y ve que no puede hacerlo porque no cabe; así que dice: *Esta mesa es más pequeña que la de mi casa, porque aquí no puedo poner mi pista y en la de mi casa si puedo.*
Analiza el razonamiento de Mario. Indica si ha realizado alguna medición y en qué basa su razonamiento.

1.2. Vocabulario y lenguaje propio de la medida

Un uso preciso del lenguaje es necesario para que los niños puedan construir los conceptos a los que designan. El uso de términos erróneos, por desconocimiento de su significado, daña el aprendizaje. Por ejemplo, no se deben utilizar términos asociados a magnitudes como volumen, área o longitud para referirse a los objetos geométricos, cuerpo geométrico, superficie, segmento o arco.

Los términos superficie y área presentan confusión porque en la vida cotidiana suelen utilizarse indistintamente. Como se recoge en el capítulo previo, ambos términos designan conceptos diferentes relativos a una misma magnitud, siendo el área resultado de la cuantificación de la superficie. El término «tamaño» también es problemático, en este caso por su ambigüedad, al utilizarse tanto para referirse a longitud como a superficie o volumen. Así, expresiones como «dibuja un cuadrado de igual tamaño que este triángulo» no tienen sentido pues no se está precisando la magnitud que se está comparando: puede ser la longitud del perímetro, la altura, la superficie.

El uso de diversas palabras para referirse a una misma magnitud es otra fuente de dificultad asociada al lenguaje. Por ejemplo, en el caso de la longitud, en el lenguaje cotidiano se emplean términos diferentes según el contexto. Entre ellos están anchura, altura, espesor, profundidad, diámetro, altitud, grosor, envergadura, amplitud, contorno, distancia. Adicionalmente, el uso de uno u otro término está en ocasiones asociado a diferentes direcciones, y puede depender del contexto. Por ejemplo, la profundidad de un mueble se refiere a su dimensión horizontal, mientras que la profundidad de una piscina es una dimensión vertical y la profundidad de una madriguera de conejos refiere a una dimensión arbitraria.

La precisión en el lenguaje ayuda también a enfatizar la idea de que toda medida es una aproximación, utilizando expresiones tales como casi 2 kg, entre 6 y 7 cm, algo más de tres tazas, casi tres lápices.

ACTIVIDAD 6: Analiza la frase de Jaime recogida al inicio de este capítulo desde el punto de vista de la comprensión de los vocablos relacionados con el tiempo.

ACTIVIDAD 7: Escribe varias frases en las que utilices la palabra «tamaño» en situaciones cotidianas. Posteriormente reformúlalas para evitar el uso de dicha palabra y precisar la magnitud a la que te estás refiriendo.

ACTIVIDAD 8: Elabora una tarea que propondrías a tus alumnos de 5 años en la que tengan que explicar por carta a un estudiante de otro colegio cómo es su clase, haciendo hincapié en sus dimensiones.

2. EDUCACIÓN DEL PENSAMIENTO MÉTRICO

La escuela delega parte de la enseñanza de la medida en la sociedad esperando que los niños aprendan ciertos temas en su entorno familiar y social. No obstante, si bien es cierto que en gran parte de las situaciones reales hay presencia de magnitudes y con frecuencia se usan expresiones sobre medida, la formación de un pensamiento métrico adecuado exige que la escuela se implique en la educación de dicho pensamiento, considerando las competencias que abarca y supliendo las carencias que no llega a proporcionar el entorno social para adquirir dicha competencia. La investigación y la experiencia docente han constatado que los principios de la medida son difíciles para los niños y requieren más atención de la que se le da tradicionalmente en la enseñanza.

2.1. Comparación entre cantidades de magnitud

En el inicio de la idea de medida está la comparación de atributos que presentan criterios mensurables: más/menos largo que, más/menos ligero que, tan alto como, está más/menos lleno que... La comparación respecto de una magnitud considerada lleva a identificar que las cantidades son «iguales» o que una es «más» o «menos» que otra respecto de esa magnitud. Hay objetos que son difíciles de comparar directamente, por lo que es necesario el uso de intermediarios que faciliten la comparación. Por ejemplo, para comparar la anchura de dos puertas o la altura de dos señales de tráfico, al no poderse disponer una junto a la otra, será de utilidad comparar ambas longitudes con una cuerda. Para comparar la capacidad de dos vasos con diferente altura y base, es habitual utilizar agua. Vertiendo el agua que cabe en uno de los vasos, en el otro podremos identificar cuál de los dos tiene mayor capacidad.

Las tareas de comparación permiten detectar si los niños comprenden el atributo que están observando. También permiten introducir el lenguaje específico sobre relaciones entre cantidades de una misma magnitud: corto y largo, alto y bajo, ligero y pesado, lleno y vacío, día y noche, mañana y tarde, antes y después, día y semana.

Asimismo, por medio de estas comparaciones, los niños aprenden procesos que serán útiles posteriormente en la medición. Es recomendable comenzar con objetos que sean iguales en todos los atributos salvo en el que se quiere comparar (por ejemplo, lápices, regletas o espaguetis de diferentes longitudes).

Dependiendo de la magnitud considerada, la acción de comparar presenta algunas peculiaridades.

La longitud es una de las magnitudes más fácilmente perceptibles, siendo la distancia entre dos puntos la longitud más difícil de captar. Para la comparación de distancias es útil materializarlas por medio de algún objeto rectilíneo.

La superficie de dos objetos puede ser comparada de forma perceptiva si ambos son similares en forma y difieren significativamente en su superficie. Es fácil concluir que la superficie de esta hoja del libro es mayor que la de una tarjeta de crédito. Cuando las superficies pueden ser superpuestas, la comparación se facilita. Las primeras comparaciones directas deben hacerse con superficies que encajen unas dentro de otras. Si el niño tiene idea de la conservación de la superficie (que una figura puede ser cortada y reorganizada sin afectar a su superficie), entonces pueden realizarse comparaciones directas descomponiendo las figuras. La comparación indirecta de dos objetos no próximos puede realizarse a través de otro objeto. Por ejemplo, ayudándose de una pieza de papel cortada con la misma superficie que uno de los objetos a comparar y superponiéndola sobre el otro, ya sea directamente o recortándola adecuadamente.

La figura 10.5 muestra un ejemplo de actividad en la que para comparar la superficie de las figuras A, B y C se han superpuesto unas figuras sobre otras. De este modo, se percibe que la superficie de B es mayor que la superficie de A y que la superficie de C. Conjugando la superposición de A en C y recortando (descomponiendo) la figura A, se comprueba que ambas figuras, A y C, tienen la misma superficie.

ACTIVIDAD 1: Supón que en una clase se ha propuesto un proyecto mediante el cual los escolares han de construir un barrio, ya sea con casas de cartulina o juegos de construcción. Propón, para ese proyecto, dos tareas en las cuales los escolares necesiten realizar comparaciones de superficies.

La dificultad en la comparación de capacidades es similar a la que atañe a la comparación de longitudes. La magnitud capacidad puede introducirse mediante la comparación de contenidos de dos recipientes. Es más difícil hacer comparaciones de capacidad perceptiblemente, pues los niños tenderán inicialmente a centrarse en longitudes concretas de los recipientes (altura, anchura o profundidad). Por este motivo se aconseja realizar comparaciones directas utilizando arena, agua, pelotas pequeñas o alguna otra sustancia con la que se puedan llenar los recipientes.

A B C

B A

B C

A C

Superposición de A sobre B

Superposición de C sobre B

Superposición de A sobre C y descpmposición

Figura 10.5.—Comparación de superficies por superposición y descomposición.

Los niños pueden verter el contenido de un recipiente en el otro para comparar sus capacidades o, en el caso de utilizar objetos contables como pelotas, pueden contar los que caben en cada uno de ellos y comparar dichas cantidades (figura 10.6).



Figura 10.6.—Comparación de la capacidad de dos cestas.

Además de la comparación directa, se hacen comparaciones perceptivas. Por ejemplo, pueden prever qué vaso puede contener más agua y posteriormente comprobar la conjetura hecha. La comparación indirecta será necesaria cuando el contenido de un recipiente no pueda verterse en el otro y entonces deba utilizarse un recipiente adicional como intermediario para la comparación; puede usarse una jarra medidora. Para saber si el niño distingue bien la capacidad de la longitud, se suelen usar recipientes con diferentes formas. Un ejemplo tradicional es el de dos vasos, uno con mayor base y menor altura que el otro. Una comparación perceptiva en este caso difícilmente permitirá identificar cuál presenta más capacidad.

Para la comparación de tiempos de duración, se distingue tiempos de corta y larga duración. La comparación directa es en este caso difícil de realizar, ya que esta magnitud sólo es observable a través

de instrumentos que le sirven de soporte, como los relojes y cronómetros. Estos instrumentos facilitan la comparación indirecta a partir de los valores numéricos que proporcionan. Para la comparación de dos intervalos de tiempo, cuando éstos no difieren significativamente en duración, es necesario que coincidan en principio o final o que se trate de fenómenos que se pueden repetir de forma exacta (por ejemplo, la duración de una canción, el tiempo en que tarda en caer la arena en un reloj de arena, el tiempo que un avión de papel está volando).

El sentido bárico es el que permite comparar pesos de forma perceptiva, sopesando objetos (figura 10.7). Aunque la comparación se practique, sigue siendo poco precisa al verse altamente influida por la facilidad con que el objeto puede ser agarrado para sopesarlo. Este hecho hace necesario el uso de instrumentos para comparar. Una tarea que se puede realizar con los niños para trabajar el sentido bárico es el juego «hacer de balanzas»: tras sopesar los diferentes materiales disponibles, cada niño se coloca con los brazos en cruz y otro niño le trae dos objetos cada uno de los cuales colocará en una mano. Debe hacer una estimación de cuál pesa más y decirlo en voz alta. Posteriormente se puede hacer un diálogo sobre cuál es el objeto que pesa más (el más pesado) y cuál el que pesa menos (el más ligero).



Figura 10.7.—Comparación de pesos de forma perceptiva[1].

[1] Imagen de la portada del libro *Medianoche en el jardín del bien y del mal* de John Berendt.

La balanza de barra con platillos (de Roberval) resulta especialmente útil para comparar dos pesos de forma directa (figura 10.8). Para motivar su uso, se recomienda comenzar con objetos que difieran poco en peso y, por tanto, no sea fácil perceptivamente percibir cuál es el más pesado. No obstante, para introducir la balanza es recomendable utilizar pesos que difieran significativamente para que vean con claridad cómo la balanza se inclina hacia el lado del objeto que pesa más. La comparación indirecta se introduce cuando se va a trabajar la medición de peso con unidades de medida.



Figura 10.8.—Comparación del peso de objetos en una balanza de Roberval.

Para corregir la confusión entre peso y volumen se recomienda trabajar mediante la comparación de objetos de igual volumen pero diferente peso y viceversa. Asimismo, se disuade del uso de la jarra medidora, que combina unidades de peso y capacidad.

Para trabajar la comparación de volúmenes es recomendable utilizar objetos proporcionales del mismo material, como por ejemplo las regletas Cuisenaire. De este modo se reduce la complejidad que supone considerar tres dimensiones. Un método útil para comparar volúmenes es hacer uso del principio de Arquímedes, que relaciona el volumen de un objeto con la cantidad de líquido que desaloja al ser sumergido.

Para reducir la confusión que suele presentarse entre volumen y capacidad, se recomienda inicial-

mente trabajar el volumen con objetos que no sean recipientes de ninguna sustancia y, por tanto, no tengan capacidad.

ACTIVIDAD 2: Para cada una de las magnitudes que estamos considerando, propón tareas que permitan comparar cantidades de dichas magnitudes en diferentes objetos cotidianos para los niños.

2.2. Clasificación y ordenación de objetos por la cantidad de magnitud

A partir de la comparación según una magnitud, se pueden hacer clasificaciones y ordenaciones. La comparación de al menos tres elementos da lugar a la ordenación y el uso de expresiones tales como «en medio de», «antes de», «después de». Estas actividades contribuyen, adicionalmente, a la adquisición de la conservación de la magnitud considerada, no siendo necesaria como requisito previo.

Entre las diferentes variables a tomar en cuenta en la enseñanza de la medida están: la posibilidad de proceder a una comparación directa, los sentidos a utilizar y el tipo de magnitud. Así, una actividad en la que se practica la comparación directa de longitudes por medio del tacto consiste en trabajar la ordenación de las regletas Cuisenaire con los ojos tapados, realizándose después un diálogo, ya con los ojos abiertos, sobre cuál es la regleta más corta y cuál la más larga.

2.3. Composición y descomposición

Para el desarrollo del pensamiento métrico en los primeros niveles educativos, se recomienda realizar tareas que impliquen componer y descomponer cantidades de magnitud. Las actividades de composición y descomposición de figuras planas o tridimensionales que no sean muy complicadas, a modo de puzles, permiten trabajar la noción de superficie y volumen. En el caso del peso, usando la balanza, se puede iniciar un diálogo sobre los pesos de diferentes alimentos para posteriormente introducir la balanza y, tras colocar un alimento en uno de los platillos, pedir a los niños que busquen dos alimentos que juntos equilibren la balanza.

2.4. Estimación de medidas

La estimación de medidas es importante por incorporar una forma de hacer matemáticas vinculada al uso de estrategias personales de interpretación y valoración de resultados. Este tipo de estimación se distingue de otros dos tipos con los cuales guarda cierta relación: la estimación en el cálculo (estimación computacional) y la estimación de numerosidades.

Estimar medidas es una acción compleja que involucra distintas habilidades, algunas de ellas compartidas con el proceso de medida. Entre estas habilidades se encuentran comprender y percibir la magnitud a estimar, comparar objetos, comprender el concepto de unidad de medida, disponer de una imagen mental de la unidad y/o de referentes a utilizar para estimar, adecuar la unidad de medida a utilizar a lo que se vaya a estimar, iterar la unidad, así como seleccionar y utilizar estrategias para hacer estimaciones.

Este tipo de estimación se efectúa a nivel personal, utilizando la experiencia previa y las referencias interiorizadas por la persona. Es una capacidad adquirida y evolutiva, dirigida a hacer valoraciones que permitan tomar decisiones. La experiencia es fundamental en el desarrollo de la estimación, la aproximación y la conciencia de la razonabilidad del resultado obtenido. Desde la educación infantil se recomienda promover que el niño vaya adquiriendo referentes propios, en especial los elaborados a partir de su propio cuerpo. Inicialmente se puede comenzar con actividades de comparaciones, como por ejemplo pensar si en su mochila puede guardar ciertos objetos (silla, un cuadro del colegio, la lámpara de mesa del escritorio etc.,), continuar con comparaciones de objetos más próximos entre sí, como estimar cuántos vasos se pueden llenar con el agua de una botella, hasta llegar a estimar medidas mediante unidades estándar.

En general la estimación es una actividad en la que los estudiantes disfrutan. Se puede trabajar prediciendo la medida de algún objeto (como se ha indicado anteriormente) en principio sugiriendo la unidad a utilizar. También se puede indicar una medida y pedir que se busquen objetos que tienen aproximadamente esa medida. La estimación puede integrarse fácilmente en las actividades de medida, pidiendo a los niños que indiquen la medida que crean que van a obtener antes de proceder a la medición, o en conversaciones sobre otras áreas con preguntas tales como: ¿Cuánto puedes saltar? ¿Cuánto papel crees que necesitarás para tu proyecto de arte? ¿Cuántos días creéis que tardaremos en leer este libro? Las estrategias a utilizar por cada niño pueden ser diferentes, y es interesante que las expliquen a sus compañeros. Una estimación nunca debe clasificarse como correcta o incorrecta; debemos animar al niño a que obtenga cada vez mejores estimaciones.

ACTIVIDAD 3: Diseña varias actividades de estimación que incluyan los dos tipos mencionados: estimar la medida de un objeto e identificar objetos cuya medida se aproxime a una dada.

2.5. Dificultades con la medida

Se considera que muchas de las dificultades que se detectan en la construcción del pensamiento métrico son consecuencia de la enseñanza, la cual ha centrado demasiado la atención en la competencia procedimental y dedica poco tiempo a experiencias informales de medición relacionadas con los principios de la medida, así como a la transición hacia experiencias formales. También se indica que, por lo general, la medida ha sido una excusa para trabajar en la escuela actividades de tipo aritmético, descuidando la comprensión de los conceptos y procedimientos implicados y convirtiendo el conteo de unidades y el uso de instrumentos de medida en un aprendizaje memorístico carente de significado.

En el uso de instrumentos de medida una fuente de dificultad está en que los niños no posean la comprensión suficiente de qué es medir y no entiendan qué están haciendo. El énfasis debe estar en entender la racionalidad del proceso, en los instrumentos utilizados y en la conexión entre instrumentos de medida y el trabajo manipulativo con las unidades. Materiales como las regletas de Cuisenarie permitirán hacer comparaciones de longitudes y establecer una unidad de medida (por ejemplo, la pieza más pequeña).

Se han detectado dificultades concretas, como las ligadas al aprendizaje del funcionamiento del reloj, que están relacionadas con capacidades matemáticas. Cuando el niño carece de orientación espacial y no distingue entre izquierda y derecha o arriba y abajo, tendrá dificultad en la lectura del reloj para distinguir entre el 6 y el 9 o entre las tres en punto y las nueve en punto. También se ha detectado que para los niños es más difícil poner en el reloj una hora dada que leer una hora ya puesta.

3. RECOMENDACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA MEDIDA

Medir sólo tiene razón de ser cuando se necesita una cuantificación precisa o cuando los sentidos no son suficientes para comparar y ordenar los objetos considerados según una magnitud.

Las fases de iniciación del aprendizaje de la medida se deben dirigir hacia trabajar la magnitud sin recurrir a la medida. El foco, sobre todo en los niveles de educación infantil, debe estar en desarrollar la comprensión de los conceptos y procedimientos implicados en la medida. La enseñanza relacionada con la medida debe abordarse en situaciones reales en las que el niño tenga un papel activo haciendo y experimentando, por medio de actividades que incluyan la discusión para estimular la adquisición de lenguaje y la comprensión de ideas y conceptos. Sólo manipulando es posible distinguir los atributos de los objetos (por ejemplo, que un objeto pesa más/menos que otro, que un recipiente tiene más/menos capacidad que otro, o que dos figuras tienen igual superficie). Así, por ejemplo, la capacidad de un vaso y una botella puede compararse vertiendo agua del uno en el otro (figura 10.9).



Figura 10.9.—Comparación de la capacidad de una botella y un vaso.

Las primeras situaciones que se propongan al niño no deben requerir del uso del número. Éste debe ir apareciendo conforme el niño lo considere necesario para poder explicar sus resultados.

Se sugiere dirigir inicialmente la atención hacia la conservación y la transitividad, la repetición de la unidad de medida, la estimación y la aproximación. Estas dos últimas componentes son propias de etapas posteriores a la educación infantil. También debe reducirse el uso de objetos dibujados, idealizados o matematizados y, en cambio, utilizar más materiales concretos cercanos al niño y variedad de instrumentos de medida.

Se recomienda comenzar la enseñanza de la medida utilizando unidades de medida no estándares. Los niños cada vez tienen más familiaridad con las unidades estándar, si bien que conozcan su nombre no implica que conozcan su significado ni cómo utilizarlas. Cuando empiecen a referirse a unidades estándar, sin conocer bien su significado, es fundamental facilitarles un soporte físico que les permita visualizar la cantidad de magnitud que corresponde a la unidad (por ejemplo, un listón de madera que mida un metro; un bloque de arcilla que pese un kilogramo).

Antes de utilizar una unidad estándar es recomendable que el niño interiorice la cantidad que representa dicha unidad. Por ejemplo para el caso del centímetro, decímetro o metro, se sugieren actividades como las siguientes partiendo de una tira de esa unidad de largo:

- Buscar objetos que presenten dicha longitud.
- Por parejas, un niño intenta situar los dedos índices a una distancia correspondiente a esa unidad de medida. El otro niño deberá usar su tira de papel para confirmar la estimación.
- Construir con objetos más pequeños (por ejemplo, lápices, clips) una longitud equivalente a dicha unidad, comprobándola posteriormente con su tira de papel.

Posteriormente llega el momento de medir. En la práctica podrán comprobar que la medida reiterando tiras no es fácil. Uniendo los extremos de las tiras puede construirse una «regla» (figura 10.10) que les facilitará la reiteración de la unidad y les permitirá contar el número de unidades para recubrir la longitud. Si alternamos el color de las tiras, facilitaremos el conteo. Posteriormente pueden numerarse las unidades de la «regla» construida para facilitar el conteo. Esta actividad ayudará a los niños a entender cómo se construyen las reglas y cintas métricas y que al usarlas están contando unidades.



Figura 10.10.—«Regla».

En todos los casos se debe procurar que las nuevas unidades que se introduzcan estén relacionadas con aquellas que el niño ya conoce. Los niños se familiarizan con una unidad estándar mediante la comparación, la medida, la estimación y la construcción. Es importante que no se introduzcan varias unidades al mismo tiempo, que los números que surjan de la medida no sean demasiado grandes y que las unidades no sean demasiado pequeñas ni demasiado grandes para que el niño pueda manipularlas con cierta facilidad.

Es conveniente que los alumnos lleguen a percibir la necesidad de una unidad de medida universal.

Una actividad con unidades de medida no estándares que permite apreciar esta necesidad es hacer una receta tomando como unidad de medida una taza y empleando tazas de diferente tamaño. Por ejemplo, si preparamos limonada midiendo la cantidad de agua con una taza muy grande y el zumo de limón con una taza muy pequeña, el sabor final será muy diluido. Otras actividades encaminadas a realzar la necesidad de una unidad de medida universal son aquellas que impliquen comunicar la medición a personas no presentes en el aula, como por ejemplo una receta de bizcocho o el tamaño de la libreta que han de comprar para la clase de dibujo.

La medición permite ganar precisión para hacer comparaciones indirectas y comunicárselas a otras personas. A partir de la medida de un mismo objeto con diferentes unidades, los niños pueden llegar a percibir la necesidad de precisar (dibujando o escribiendo) la unidad junto con el número.

Por otra parte, realizando mediciones de objetos que difieren en poca cantidad de magnitud, primero con unidades mayores y luego disminuyendo el tamaño de la unidad a emplear, se favorece que los niños perciban que las unidades más pequeñas permiten una medida más precisa.

Dado el carácter aproximado de la medida, y las limitaciones que pueden tener los niños en su precisión como consecuencia de sus escasos conocimientos numéricos, es recomendable ejercitar en ellos la búsqueda de intervalos en los que estén contenidas las cantidades de magnitud consideradas.

Actividad 1: Enumera unidades de medida no estándares útiles para medir, con niños de educación infantil, cada una de las magnitudes consideradas en este capítulo.

Siempre que se introduce una nueva magnitud, se recomienda realizar las siguientes acciones:

- Identificarla y discriminarla de otras magnitudes.
- Hacer clasificaciones y ordenaciones basadas en el atributo base de la magnitud.
- Hacer composiciones y descomposiciones de cantidades de dicha magnitud.
- Utilizar e interiorizar unidades de medida (estándares y no estándares).
- Relacionar unidades de medida correspondientes a dicha magnitud.
- Practicar la estimación.
- Utilizar diversos instrumentos de medida.
- Incidir en la idea de aproximación.

Dada la utilidad de la medida en la vida cotidiana, tiene un gran potencial para no quedar reducida a actividades de tipo formal. Algunos ejemplos de tareas atractivas para los escolares son: comparar sus alturas o hasta dónde llega alguna parte de su cuerpo o sus ropas, una información que se puede recoger en un póster situado verticalmente en la pared en el que se represente con un punto y su nombre la cantidad de longitud que corresponda a cada niño, medir contornos de árboles uniendo «el abrazo» (la envergadura) de varios niños, elaborar recetas sencillas pesando cada uno de los ingredientes a utilizar o midiendo las cantidades con unidades de medida no estándares (por ejemplo, cucharadas, tazas), confeccionar guirnaldas que se adapten a longitudes de diferentes partes del aula o usar diferentes partes de su cuerpo, como las que aparecen en la figura 10.11, para comparar longitudes.

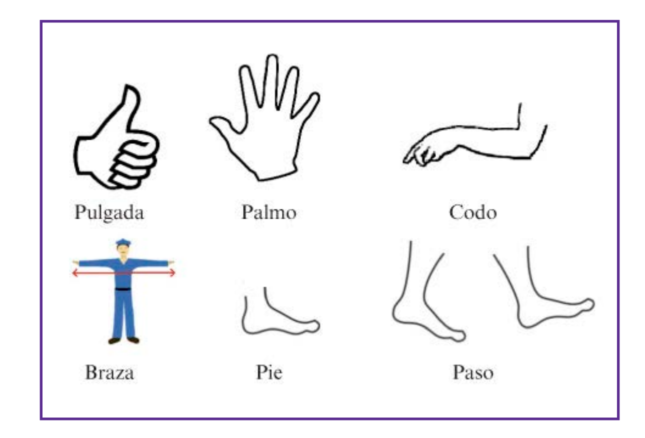


Figura 10.11.—Partes del cuerpo que se pueden utilizar para comparar longitudes.

En relación con la ocurrencia de sucesos, en educación infantil se trabajan algunos aspectos sobre el tiempo. Por ejemplo en contextos naturales, el tiempo que queda antes de la merienda o antes de ir a casa, el tiempo de crecimiento de semillas o de cocción de unos pasteles en el horno. Otros ejemplos son los juegos que involucran movimiento, como caminar y correr, y la combinación de música con movimiento (como baile o canto y percusión).

Al final del período de educación infantil algunos escolares pueden hacer tareas sobre la determinación del tiempo mediante calendarios y relojes y la cronología, ya sea de tipo causal o memorizada. En relación con esta última, cabe señalar que hasta los 7 u 8 años, en que el niño está en el período de operaciones concretas, no es capaz de revertir una transformación u operación, y por tanto encuentra dificultades en la secuenciación de imágenes o fotografías de acontecimientos (una botella llenándose, un objeto cayendo).

Las tareas que se han señalado están conectadas bien con otros conceptos matemáticos, bien con otras áreas de conocimiento.

3.1. Instrumentos de medida

Los instrumentos de medida más comunes, en edades tempranas, son las reglas, las cintas métricas, las balanzas, los recipientes graduados y los relojes.

En el caso de las primeras etapas escolares es recomendable que las reglas, cintas métricas y recipientes graduados que se utilicen sólo tengan marcas de aquella unidad que los niños estén trabajando y ya conozcan. Así podemos usar la regla antes mencionada (figura 10.10) o de forma similar una cinta métrica donde sólo vengan marcados los metros. Se recomienda la construcción junto con los niños de algunos de estos instrumentos, tales como la regla o recipientes graduados, para ayudarles a entender el significado de las escalas que estos instrumentos contienen.

La investigación ha mostrado que el que los niños utilicen una regla para medir longitudes no significa que entiendan lo que están midiendo. Usar una regla para medir es una habilidad que implica contar líneas o espacios en la regla, mientras que la medición es un procedimiento. Desde la enseñanza debe incidirse en dar significado a los números en una escala y al punto de origen, que es cero, distinguiendo la acción de contar objetos discretos de la de contar partes de una longitud continua.

Los relojes de arena y los relojes de vela (figura 10.12) son de utilidad en la etapa de educación infantil para trabajar la percepción de la magnitud tiempo y comparar la duración de diferentes sucesos. La lectura del reloj de agujas/manecillas es un proceso muy complejo, pues las manecillas se mueven de forma circular y hay dos o más formas de leer la escala (horas, minutos, segundos). Además las agujas pasan varias veces por la misma posición con significados diferentes. Algunas de las habilidades clave que pueden trabajarse con los niños de infantil para el manejo del reloj son: identificar la manecilla de la hora y la manecilla de los minutos y la dirección en que ambas se mueven y reconocer la hora que es, sin precisar minutos ni segundos. El aprendizaje del manejo de los relojes de agujas favorece la comprensión de las relaciones existentes entre horas, minutos y segundos.

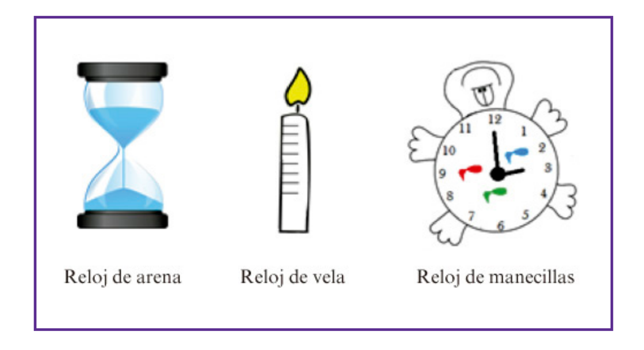


Figura 10.12.—Tres tipos de reloj.

La preocupación por la lectura del reloj puede entorpecer la adquisición del concepto de tiempo. Es conveniente relacionar la lectura del reloj con actividades que tengan interés para el niño, como la hora de levantarse, la hora del recreo, la del almuerzo...

4. EJERCITA TU APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1: Consulta los documentos curriculares de educación infantil e identifica las directrices que se recogen relativas a la enseñanza de la medida en esta etapa.

ACTIVIDAD 2: Propón tareas que, partiendo de la lectura del cuento de Pinocho y su nariz, permitan trabajar conceptos relacionados con la longitud y su medida.

ACTIVIDAD 3: Los pentominos y el tangram son materiales didácticos que pueden ser fabricados fácilmente de forma artesanal. Sugiere tareas a realizar con cada uno de ellos que sean de utilidad para trabajar la percepción, la conservación y la medida de la magnitud superficie sin necesidad de usar instrumentos de medida.

ACTIVIDAD 4: Describe una serie de actividades que puedes utilizar para introducir la unidad de medida kilogramo.

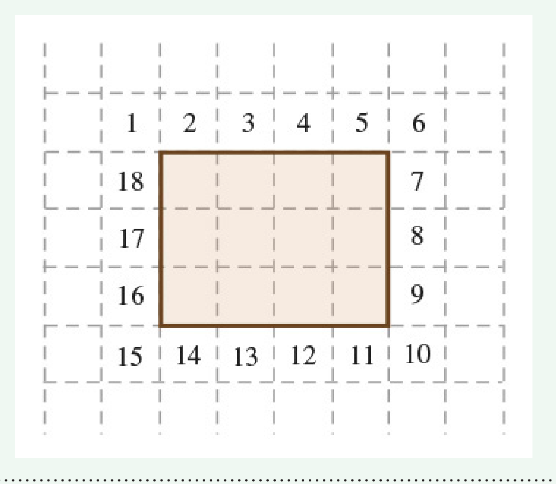
ACTIVIDAD 5: Diseña tareas que utilicen la preparación de una receta (por ejemplo, limonada, bizcocho, macedonia) como contexto en el que trabajar nociones relacionadas con la capacidad y el peso.

ACTIVIDAD 6: Proporciona un ejemplo que muestre diferencias entre volumen y capacidad de un objeto.

ACTIVIDAD 7: Diseña una actividad temporal que pueda realizar el niño para que se vaya familiarizando con la hora en la que realiza algunas de las rutinas del día: levantarse, acostarse, almorzar, ir al colegio... Identifica situaciones o rutinas de la vida cotidiana en las que se utiliza la estimación de medidas de diferentes magnitudes.

ACTIVIDAD 8: En una conversación en la clase ha surgido la pregunta ¿qué mesa es más grande, la del profesor o la del director? Sugiere tareas que aprovechando este interés de los alumnos permitan trabajar conceptos relacionados con la medida implicando las magnitudes longitud y superficie.

ACTIVIDAD 9: «Tengo un estudiante que comprende la idea de perímetro pero siempre cuenta de forma incorrecta pasándose en cuatro unidades. Por ejemplo, cuando le pregunté por el rectángulo de la imagen, me dijo que el perímetro son los cuadrados alrededor del borde y los contó como se muestra.» ¿Estás de acuerdo con esta profesora? ¿Qué preguntarías al estudiante para estar seguro de su comprensión del concepto de perímetro?



ACTIVIDAD 10: Una maestra de infantil propone en su aula de escolares de 5 años la siguiente situación. Escoge a Alba (niña muy alta), a Blanca (niña muy bajita) y a Carlos (con una estatura intermedia). Explica a la clase: Un paso largo se llama zancada, y se consigue cuando al andar se abren mucho las piernas. ¿Cuántas zancadas creéis que necesitará Alba para recorrer el ancho de la clase? Dada una respuesta por el resto de la clase, pregunta de nuevo. ¿Creéis que serán el mismo número de zancadas las que necesiten dar Blanca y Carlos? Obtenida la respuesta, continúa. Vamos a comprobarlo. A continuación los tres escolares recorren a zancadas el ancho de la clase y comprueban las conjeturas que han hecho.
Analiza la situación planteada y señala los conocimientos matemáticos que la maestra pretende que los estudiantes trabajen.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Barcelona: Octaedro.

Alsina, A. (2011). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años).* Barcelona: Graó.

Canals, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas.* Barcelona: Octaedro.

Castro, E. (2011). *Proyecto docente.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* Madrid: Síntesis.

Castro, E., Del Olmo, M. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una didáctica escolar.* Madrid: Síntesis.

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Madrid: Síntesis.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach.* Nueva York: Routledge.

Clements, D. H. y Sarama, J. (eds.) (2004). *Engaging: Young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education.* Búfalo, NY: New York State University.

Flores, P. y Rico, L. (coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.* Madrid: Pirámide.

Hurrell, D. P. (2013). What teachers need to know to teach mathematics: An argument for a reconceptualised model. *Australian Journal of Teacher Education, 38* (11), 54-64.

Kamawar D., LeFevre, J. A., Bisanz, J., Fast, L., Skwarchuk, S. L, Smith-Chant, B. y Penner-Wilge, M. (2010). Knowledge of counting principles: How relevant is order irrelevance? *Journal of Experimental Child Psychology, 105,* 138-145.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Shifter (eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: S.A.E.M., THALES. Reston, VA: Autor.

Pizarro, N. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los profesores de primaria* (tesis doctoral). Universitat Autónoma de Barcelona.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L. y Suydam M. N. (2001). *Helping children learn mathematics.* Nueva York: John Wiley & Sons.

Rico, L. y Segovia, I. (coords.) (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Madrid: Pirámide.

Rivera, F. D. (2014). *Teaching to the math common core state standards. Focus on Kindergarten to Grade 5.* Rotterdam: Sense Publishers.

Sánchez, S. (2008). *Una visión creativa de las magnitudes y su medida en educación infantil* (tesis doctoral). Universidad de Málaga.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhook mathematics education research. Learning trajectories for young children.* Nueva York: Routledge.

Segovia, I., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Wright, R. J., Stander, G., Stafford, A. K. y Martland, J. (2015). *Teaching number in the classroom with 4-8 year olds*. Los Ángeles, CA: Sage.

TÍTULOS RELACIONADOS

Aplicaciones de intervención psicopedagógica, *J. N. García-Sánchez (coord.).*
Atención a las necesidades educativas específicas, *M.ª A. Lou (dir.).*
Bases teóricas y de investigación en educación especial, *J. L. Gallego Ortega y A. Rodríguez Fuentes.*
Bienestar psicológico infantil, *M. Fernández-Molina.*
Cómo enseñar en el aula universitaria, *J. Paredes y A. de la Herrán (Coords.).*
Compendio conceptual de la Educación Social, *M.ª Senra y J. Vallés.*
Conocer y comprender las organizaciones educativas, *M.ª J. Carrasco, J. M. Coronel, M.ª L. Fernández, M.ª P. García, S. González y E. Moreno.*
Desarrollo curricular de la Educación Física en la Educación Infantil, *P. Gil Madrona (coord.).*
Didáctica, *C. Moral Santaella y M.ª P. Pérez García.*
Didáctica de la lengua y educación literaria, *P. Guerrero Ruiz y M.ª T. Caro Valverde (coords.).*
Didáctica de las Ciencias para Educación Primaria I y II, *J. M. Vílchez González (coord.).*
Didáctica de las Ciencias Sociales para la Educación Primaria, *S. Alonso Arenal (coord.).*
Dificultades de aprendizaje y trastornos del desarrollo, *M.ª J. Fiuza Asorey y M.ª Pilar Fernández Fernández.*
Dificultades del aprendizaje escolar, *J. González-Pienda y J. C. Núñez Pérez (coords.).*
Dislexia en español, *J. E. Jiménez (coord.).*
Educación, neoliberalismo y justicia social, *F. M. Martínez.*
Educación especial, *A. Sánchez Palomino y J. A. Torres González.*
Educación intercultural y aprendizaje cooperativo, *M.ª J. Díaz-Aguado.*
Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil, *E. Castro Martínez (coord.).*
Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, *L. Rico Romero y P. Flores Martínez (coords.).*
Enseñanza de las Ciencias de la Naturaleza en Educación Infantil, *R. Quijano López (Coord.)*
Escritura académica. De la teoría a la práctica, *J. A. Núñez (coord.).*
Escritura y lectura en Educación Infantil (Manual + Cuadernillo), *F. Guzmán Simón, M. Navarro Pablo y E. García Jiménez.*
Escuela y tolerancia, *M.ª J. Díaz-Aguado.*
Estrategias de aprendizaje, *J. A. González-Pienda, J. C. Núñez Pérez, L. Álvarez Pérez y E. Soler Vázquez (coords.).*
Estrategias para mejorar el rendimiento académico de los adolescentes, *M. A. Adell i Cueva.*
Evaluación e intervención didáctica, *F. Peñafiel Martínez, J. A. Torres González y J. M.ª Fernández Batanero.*
Evaluación e intervención psicoeducativa en dificultades de aprendizaje, *A. Miranda, E. Vidal-Abarca y M. Soriano.*
Formación para la educación con tecnologías, *M.ª-J. Gallego-Arrufat y M. Raposo-Rivas (coords.).*
Formación para la inclusión laboral de personas con discapacidad intelectual, *M.ª del R. Cerrillo y S. de Miguel (coords.).*
Iniciación escolar a la escritura y la lectura, *A. Suárez Yánez.*
Innovación educativa. Más allá de la ficción, *M. Fernández Navas y Noelia Alcaraz Salarirche (coords.).*
Intervención psicoeducativa, *L. Álvarez Pérez, J. A. González-Pienda, J. C. Núñez Pérez y E. Soler Vázquez.*
Intervención psicoeducativa en niños con trastornos generalizados del desarrollo, *F. Alcantud Marín (coord.).*
Intervención psicológica en actividad física y deporte, *P. J. Jiménez.*
Intervención psicológica con adolescentes, *M. Garaigordobil.*
Intervención psicológica para desarrollar la personalidad infantil, *M. Garaigordobil Landazabal.*
Intervención psicopedagógica en los trastornos del desarrollo, *J. N. García Sánchez (coord.).*
Intervención psicopedagógica y currículum escolar, *J. A. Beltrán Llera, V. Bermejo Fernández, L. F. Pérez Sánchez, M.ª D. Prieto Sánchez, D. Vence Baliñas y R. González Blanco.*
La alteridad en educación, *J. L. Gallego y A. Rodríguez.*
La convivencia escolar en positivo, *S. Ibarrola-García y C. Iriarte Redín.*
La educación repensada, *M.ª R. Belando-Montoro (Coord.).*
La escuela a examen, *M. Fernández Enguita.*
La orientación en Educación Infantil, *R. Mérida Serrano, A. Ramírez García, C. Corpas Reina y M.ª E. González Alfaya.*
Las ciencias de la naturaleza en la Educación Infantil, *R. Fernández Manzanal y M. Bravo Tudela.*
Los medios y las tecnologías en la educación, *M. Area Moreira.*
Manual de didáctica, *I. Gómez Hurtado y F. J. García Prieto.*
Manual de didáctica general para maestros de Educación Infantil y de Primaria, *B. Bermejo y C. Ballesteros (coords.).*
Manual de dificultades de aprendizaje, *M.ª del R. Ortiz González.*
Manual del educador social, *J. Vallés Herrero.*
Manual de logopedia, *F. Villegas Lirola.*
Manual de psicología de la educación, *J. A. González-Pienda, R. González Cabanach, J. C. Núñez Pérez y A. Valle Arias (coords.).*
Manual de psicología de la educación, *M.ª del M. Prados, V. Sánchez, I. Sánchez, R. del Rey, M. Á. Pertegal, M. del C. Reina, P. Ridao, F. J. Ortega y J. Mora.*
Manual de psicología del desarrollo aplicada a la educación, *V. Muñoz, I. López, I. Jiménez, M. Ríos, B. Morgado, M. Román, P. Ridao, X. Candau y R. Vallejo.*
Manual de tutoría y orientación en la diversidad, *J. Riart (coord.).*
Matemáticas para maestros de Educación Primaria, *I. Segovia Alex y L. Rico Romero (coords.)*
Materiales de logopedia, *F. Villegas Lirola.*
Nuevas tecnologías para la educación en la era digital, *J. A. Ortega Carrillo y A. Chacón Medina (coords.).*
Nuevos escenarios digitales, *J. Barroso y J. Cabero (coords.).*
Optimización del desarrollo y prevención de riesgos en el aula de educación infantil (Manual + Seminarios), *M.ª Fernández Cabezas, A. Burgos García, G. Alba Corredor y A. Justicia Arráez.*
Orientación Educativa en Educación Primaria, *A. Ramírez (coord.).*
Orientación educativa e intervención psicopedagógica, *L. E. Santana.*
Orientación psicopedagógica y calidad educativa, *R. Sanz Oro.*
Pensar la educación, *L. Núñez Cubero y C. Romero Pérez.*
Prácticas de psicología de la educación, *L. Álvarez Pérez, J. A. González-Pienda, P. González-Castro y J. C. Núñez Pérez.*
Prácticas de psicología del aprendizaje (Manual + Cuadernillo), *E. Merino Tejedor y J. A. Valdivieso Burón.*
Prevención de las dificultades de aprendizaje, *M.ª J. González Valenzuela.*
Prevención en dificultades del desarrollo y del aprendizaje, *J. N. García-Sánchez (coord.).*
Procesos educativos con TIC en la sociedad del conocimiento, *M. Cebrián de la Serna y M.ª J. Gallego Arrufat (coords.)*
Promover el cambio pedagógico en la universidad, *A. de la Herrán Gascón y J. Paredes (coords.).*
Psicología de la Educación, *S. Rodríguez Sánchez (coord.).*
Psicología de la educación y del desarrollo en contextos escolares, *M.ª V. Trianes Torres y J. A. Gallardo Cruz (coords.).*
Psicología de la educación para docentes, *J. I. Navarro Guzmán y C. Martín Bravo (coords.).*
Psicología del desarrollo en la edad escolar, *A. I. Córdoba Iñesta, A. Descals Tomás y D. Gil Llario (coords.).*
Psicología del desarrollo y de la educación, *M.ª V. Trianes (coord.).*
Psicología evolutiva en Educación Infantil y Primaria, *C. Martín Bravo y J. I. Navarro Guzmán (coords.).*
Psicología para docentes, *E. Briones Pérez y Alicia Gómez-Linares (coords.).*
Psicología para el profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, *C. Martín Bravo y J. I. Navarro Guzmán (coords.).*
Psicomotricidad e intervención educativa, *D. Martín Domínguez.*
Relaciones interpersonales en la educación, *M.ª R. Bueno y M. Á. Garrido.*
Sociología de la educación, *C. Gómez Jaldón y J. A. Domínguez Gómez.*
Teoría de la educación, *P. Casarres y A. Soriano (coords.).*
Vinculaciones afectivas, *M.ª J. Lafuente y M.ª J. Cantero López.*